GEOMETRIE DER ZAHLEN

NICOLA OSWALD

Inhaltsverzeichnis

"G e o m e t r i e d e r Z a h l e n habe ich diese Schrift betitelt, weil ich zu den Methoden, die in ihr arithmetische Sätze liefern, durch räumliche Anschauung geführt bin." (Hermann Minkowski, 1896)

1. Figurierte Zahlen

Gewisse Verbindungen zwischen Geometrie und Zahlentheorie liegen auf der Hand und treten etliche Male in der ein oder anderen Form in der Geschichte auf. So lässt sich einer jeden zusammengesetzten Zahl $n = ab$ mit also natürlichen Zahlen $1 < a, b < n$ ein Rechteck mit den Kantenlängen a und b zuordnen; im Falle von Primzahlen ist hingegen keine solche Rechteckzerlegung möglich:

$$\begin{array}{ccc}\bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet\end{array} \qquad \text{bzw.} \qquad \bullet\bullet\bullet$$

Ein etwas anspruchsvolleres Beispiel figurierter Zahlen bilden die Dreieckszahlen, welche sich als Partialsumme der Reihe über die natürlichen Zahlen ergeben:

$$m = 1 + 2 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

Der prägnante Ausdruck rechts ergibt sich leicht per Induktion nach m bzw. durch Addition desselben Ausdrucks als Summe mit umgekehrter Summandenfolge:

$$\begin{array}{rcl} m & = & 1 + \quad 2 \quad + \ldots + n-1 + n \\ m & = & n + n-1 + \ldots + \quad 2 \quad + 1 \end{array}$$

Date: Februar 2016.

Auf der rechten Seite bilden wir die Summen untereinanderstehender Zahlen, welche jeweils den Wert $1 + n = 2 + n - 1 = \ldots n - 1 + 2 = n + 1$ besitzen; hiervon gibt es n Stück, womit im Vergleich der Summe der linken Seiten also $2m = n(n+1)$ bewiesen ist. Diese Beweisidee hatte bereits der Volksschüler Carl Friedrich Gauß [124], S. 13. Der Bezug dieser Dreieckszahlen zur Geometrie ergibt sich durch Visualisieren derselben durch übereinandergelagerte Kreise "$\bullet$", die insgesamt ein Dreieck bilden; beispielsweise ist $6 = 1 + 2 + 3 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4$ eine Dreieckszahl:[1]

$$\begin{array}{ccccc} & & \bullet & & \\ & \bullet & & \bullet & \\ \bullet & & \bullet & & \bullet \end{array}$$

Tatsächlich hat Gauß aber etwas viel tiefliegenderes zu Dreieckszahlen bewiesen: In seinem Tagebuch [46] findet man als insgesamt 18. Eintrag

$$\text{EYPHKA! num} = \Delta + \Delta + \Delta$$

versehen mit dem Datum 10. Juli 1796. Diese Hieroglyphen sind zu übersetzen als Heureka (griechisch für 'ich hab's gefunden', ganz in Anlehnung an Archimedes, der diesen Satz nackt einer Badewanne entspringend bei einer ähnlichen Entdeckung geprägt haben soll), jede natürliche Zahl lässt sich darstellen als Summe von höchstens drei Dreieckszahlen. Das Resultat wurde bereits von Pierre de Fermat ohne Beweis geäußert; in Gauß' Disquisitiones [43] findet sich in §293 ein erster Beweis.[2] Beispielsweise gilt

$$2016 = \tfrac{1}{2} \cdot 63 \cdot 64 + 0 + 0 = 66 + 465 + 1485 = 15 + 231 + 1770$$

(um nur einige der zahlreichen derartigen Darstellungen anzugeben). Die weiteren von Fermat geäußerten Aussagen über figurierte Zahlen, dass nämlich jede natürliche Zahl als Summe von höchstens n so genannten n-Eckszahlen dargestellt werden kann, waren zu Gauß' Tagebuchzeit für $n \geq 3$ noch unbewiesen, wurden aber 1813 von Augustin Cauchy [16] hergeleitet. Den Spezialfall der Quadratzahlen, wonach jede natürliche Zahl eine Darstellung als Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen besitzt, hatte Joseph Louis Lagrange bereits 1770 bewiesen.

Dreieckszahlen treten übrigens auch bei der so genannten Pellschen Gleichung bzw. dem klassischen Rinderproblem auf. Hierbei handelt es sich um eine von Archimedes an Eratosthenes adressierte Textaufgabe um die Größe der Herde des Sonnengottes. Die auftretenden acht Teilherden (braune Rinder und dergleichen) unbekannter Größe sollen sich als ein Dreieck aufstellen lassen.[3]

Die nachstehende Grafik veranschaulicht mit $1 + 3 + \ldots + (2m - 1) = m^2$ eine weitere Identität, welche die Summe der ungeraden Zahlen mit den Quadraten in Verbindung setzt:

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \\ \\ \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \bullet & \triangle \\ \triangle & \triangle \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \bullet & \triangle & \star \\ \triangle & \triangle & \star \\ \star & \star & \star \end{array} \qquad \begin{array}{c} \ldots \\ \\ \\ \end{array}$$

Eine Vielzahl von weiteren Beispielen solcher figurierten Zahlen finden sich in [27, 110]. Tatsächlich sind figurierte Zahlen jedoch nur am Rande Gegenstand der Geometrie der Zahlen.

[1]Die Leser_in mag zur Übung einen bildlichen Beweis des folgenden Satzes von Theon von Smyrna aus dem zweiten Jahrhundert vor Beginn unserer Zeitrechnung führen: Die Summe zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen ist eine Quadratzahl (cf. [27]).

[2]Den vielleicht elegantesten Zugang zu diesem wirklich tiefen Satz von Gauß, liefern die p-adischen Zahlen.

[3]siehe Fowler [39], §2.4., für eine alternative Deutung der zu Eratosthenes' Zeiten wohl unlösbaren Aufgabe

2. Das Kreisproblem und seine Verwandten

> "Die Grundlage des ganzen Gegenstandes bildet eine eigentümliche Untersuchung über die Anzahl aller Combinationen der ganzzahligen Werte, welche zwei unbestimmte ganze Zahlen innerhalb eines vorgeschriebenen Gebietes annehmen. Offenbar kann diese Aufgabe auch unter geometrischer Fassung dargestellt werden, nämlich die Anzahl der C o m p l e - x e n Z a h l e n zu ermitteln, deren Darstellung innerhalb einer vorgeschreibenen Figur fällt."

schrieb Gauß in seinen Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Klassen, in welche die binären Formen zweiten Grades zerfallen, und ihrer Determinante aus dem handschriftlichen Nachlass, niedergeschrieben in der Zeit um 1833[4]. Der Übergang von zwei (unbestimmten) ganzen Zahlen a, b zu einer komplexen Zahl ist der Darstellung derselben in der komplexen (Gaußschen) Zahlenebene geschuldet; heutzutage spricht man bei den $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ von den ganzen Gaußschen Zahlen.

Wir nähern uns dem eigentlichen Themenkreis mit einer einfachen geometrischen Frage: Wie viele Punkte mit ganzzahligen Koordinaten liegen in einem Kreis? Hier und im Folgenden sprechen wir auch von ganzzahligen Punkten bzw. Gitterpunkten und nennen die Menge $\mathbb{Z}^2$ bestehend aus eben diesen Punkten (a, b) mit ganzzahligen Koordinaten in der euklidischen Ebene ein Gitter. Später werden wir diesen Begriff noch etwas verallgemeinern und präzisieren (im Sinne einer diskreten additiven Untergruppe des $\mathbb{R}^2$ und nicht mit Bezug auf schwedische Gardinen). Zurück zu unserer Frage. Es zählt

$$r(n) := \sharp\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \,:\, a^2 + b^2 = n\}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ einerseits eben die Gitterpunkte $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, welche einen Abstand $\sqrt{n}$ vom Ursprung $(0, 0)$ haben, andererseits auch die Anzahl der Darstellungen von n als Summe zweier Quadrate ganzer Zahlen; dies schlägt eine Brücke zwischen Geometrie und Zahlentheorie. Nach dem Zweiquadratesatz von Fermat lassen sich alle Primzahlen $p \equiv 1 \bmod 4$ als Summe zweier Quadratzahlen darstellen, so dass also $r(p) > 0$ für ebensolche p gilt; z.B. ist $13 = 3^2 + 2^2$. Im Wesentlichen ist jede solche Darstellung (bis auf die aufgrund der Symmetrien möglichen Vorzeichenwechsel und Vertauschung der Summanden) eindeutig, was auf $r(p) = 8$ für diese Primzahlen führt. Hingegen ist $r(p) = 0$ für alle Primzahlen $p \equiv 3 \bmod 4$ (weil Quadrate bei Division durch 4 den Rest 0 oder 1 lassen). Dieses recht unterschiedliche Werteverhalten lässt sich durch eine Mittelwertbildung besser verstehen: Für $x \geq 0$ ist die Anzahl der ganzzahligen Gitterpunkte in einem Kreis vom Radius $\sqrt{x}$ um den Ursprung

$$R(x) := \sharp\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \,:\, a^2 + b^2 \leq x\} = \sum_{0 \leq n \leq x} r(n).$$

Diese Anzahl von Gitterpunkten lässt sich durch die Fläche des Kreises approximieren (vermöge eindeutiger Zuordnung eines achsenparallelen Quadrates der Kantenlänge eins mit Mittelpunkt in einem jeden solchen Gitterpunkt); also mit Hilfe der Flächenformel $R(x) \sim \pi x$. Mit ein wenig elementarer Geometrie lässt sich diese Idee präzisieren: Hierzu fand Gauß, dass die Anzahl der ganzzahligen Punkte im Inneren eines Kreises vom Radius $\sqrt{x}$ asymptotisch gleich der

[4]jedoch basierend auf Ideen um die Jahrhunderwende 1801; zu finden ist diese Schrift im Anhang der Disquisitiones [43], Ausgabe von 1889, 655-661.

Kreisfläche ist, bzw. genauer

$$\pi\left(\sqrt{x}-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 < R(x) < \pi\left(\sqrt{x}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$$

gilt. Diese Ungleichungen lassen sich auch kurz so formulieren[5]

$$R(x)=\pi x+O(x^{\frac{1}{2}}),$$

was unsere Eingangsfrage beantwortet. Insbesondere erweist sich also der Mittelwert von $r(n)$ bei $n \to \infty$ als der Irrationalzahl π gleich (womit tatsächlich auch ein verschwindender Fehlerterm unmöglich ist). Das Kreisproblem fragt nun nach dem bestmöglichen Fehlerterm. Die zur Zeit beste obere Schranke ist $R(x)-\pi x \ll x^{\frac{131}{416}}(\log x)^{\frac{18\,637}{8\,320}}$ mit $\frac{131}{416} = 0,31490\ldots$ und wurde von Martin Huxley [73] erzielt, während andererseits ein Fehlerterm $x^{\frac{1}{4}}(\log x)^{\frac{1}{4}}(\log\log x)^{\frac{1}{8}}$ unmöglich ist, wie Kannan Soundararajan [134] zeigte. Vermutlich ist der Fehlerterm in Wahrheit von der Größe $x^{\frac{1}{4}+\epsilon}$.[6]

Bemerkenswerterweise sind höherdimensionale Analoga leichter zu handhaben: Bezeichnet $r_k(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von k Quadraten, so gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\frac{d}{2}}\sum_{n\le x} r_d(n)=\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)},$$

wobei die rechte Seite das Volumen der d-dimensionalen Einheitskugel des $\mathbb{R}^d$ ist,[7] wobei $\Gamma(z)$ die durch $\int_0^\infty t^{z-1}\exp(-t)\,\mathrm{d}t$ definierte Gamma-Funktion ist. Tatsächlich ist für $d\ge 4$ der bestmögliche Fehlerterm bekannt; im Falle $d\ge 5$ ist dieser gegeben durch $O(x^{\frac{d}{2}-1})$, wie Arnold Walfisz [146] zeigte; die Dimensionen $d=3$ ist hingegen noch nicht vollständig verstanden (siehe auch Fricker [42]).[8]

Ein verwandtes zweidimensionales Problem beschäftigt sich mit Gitterpunkten unterhalb einer Hyperbel. Die Teilerfunktion $n\mapsto d(n):=\sum_{d|n}1$ zählt die positiven Teiler von $n\in\mathbb{N}$. Auch hier oszillieren die Werte von $d(n)$ stark: $d(p)=2$ besteht genau für prime p, während $d(m!)$ mit wachsendem m beliebig groß wird. Hier ergibt sich mit der 'Hyperbel-Methode' von Peter Gustav Lejeune Dirichlet [30] ein Wachstum ähnlich der divergenten harmonischen Reihe, nämlich

$$\sum_{n\le x} d(n)=x\log x+(2\gamma-1)x+O(x^{\frac{1}{2}}).$$

Insofern ist der Mittelwert der Anzahl der verschiedenen Teiler einer natürlichen Zahl n also $\log n$. Das Teilerproblem fragt nach dem bestmöglichen Fehlerterm in dieser Situation. Ersetzt

[5] wobei die Schreibweise $f(x)=O(g(x)$ bedeutet, dass $|f(x)|\le Cg(x)$ mit einer absoluten Konstanten C bei $x\to\infty$ gilt

[6] Interessant mag in diesem Zusammenhang sein, welche Exponentenjagd sich im Laufe der Forschungstätigkeit des letzten Jahrhunderts hierzu stattgefunden hat: So stammen die besten Resultate vor genau einhundert Jahren aus den Federn von Georgi Voronoi [143] und Godfrey Harold Hardy [57], welche bereits $R(x)-\pi x\ll x^{\frac{1}{3}}$ bzw. die Unmöglichkeit eines Fehlers $O(x^{\frac{1}{4}})$ zeigten, wobei wir hier auf die Angabe von Logarithmuspotenzen der Einfachheit halber verzichten. Hier wurden von bekannten Mathematikern minimale Verbesserungen mit neuen, mitunter recht technischen Abschätzungen von Exponentialsummen erzielt; insofern misst der langsame Fortschritt beim Kreisproblem die Schlagfertigkeit der bestehenden Methoden zur Behandlung solcher Aufgaben.

[7] welche übrigens im Gegensatz zum d-dimensionalen Einheitswürfel ein mit $d\to\infty$ gegen null konvergierendes Volumen besitzen(!), wie sich mit Hilfe der Stirlingschen Formel zeigt.

[8] Warum dieses Gitterpunktproblem im Höherdimensionalen einfacher ist, verrät die Arithmetik: Die Anzahl $r_k(n)$ der Darstellungen von n als Summe von k Quadraten verhält sich für $k=2,3$ recht seltsam, mit wachsendem k hingegen wesentlich gleichmäßiger; siehe hierzu die Anwendungen der nachstehenden Geometrie der Zahlen auf Quadratsummen sowie Fricker [41].

man hier oder beim Kreisproblem Hyperbel oder Kreis durch eine einfach geschlossene glatte Kurve, so gilt nach einem Resultat von Vojtěch Jarník[9] (siehe Steinhaus [135]) übrigens $|a-r| < \ell$ für die Anzahl r der von einer beliebigen rektifizierbaren, einfach geschlossenen Kurve der Länge ℓ umschlossenen Gitterpunkte, deren Inneres Fläche a besitzt.[10] Jarník lieferte darüber hinaus auch Abschätzungen für die Anzahl von Gitterpunkten auf Kurven [74]; wichtige Verschärfungen für algebraische Kurven und Anwendungen in der algebraischen arithmetischen Geometrie ergeben sich mit der Arbeit von Bombieri & Pila [7].

George Pólya [116] stellte sich in seiner nahezu poetisch betitelten Arbeit Zahlentheoretisches und Wahrscheinlichkeitstheoretisches über die Sichtweite im Walde [116] die Frage, wenn um jeden Gitterpunkt $(a, b) \neq (0, 0)$ in einem Kreis vom Radius $R > 0$ um den Ursprung weitere Kreise (Bäume) vom Radius r geschlagen seien und man selbst im Ursprung $(0, 0)$ stünde, wie groß der kleinste Radius r wäre, so dass der Blick komplett eingeschränkt wäre (man also aus dem Wald nicht mehr hinausschauen könnte).[11] Sind die Radien $r = 0$ und $R = \infty$, so ist zwar nicht jeder Gitterpunkt sichtbar, tatsächlich sind dann nur die $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ sichtbar, für die a und b teilerfremd sind[12], aber sicherlich trifft keine Ursprungsgerade mit irrationaler Steigung einen ganzzahligen Punkt außer den Ursprung. Dieses Problem der Försterei überlassen wir der neugierigen Leser_in mit dem Hinweis, dass sich Pólya zur Lösung der Mathematik des folgenden Paragraphen bedient hat.

3. Minkowskis Gitterpunktsatz

Gauß' Behandlung der Frage nach der Anzahl der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten in einem gegebenen Kreis entnehmen wir unmittelbar folgende Verallgemeinerung auf beliebige Gitter: Die Anzahl der Gitterpunkte $\mathrm{z} \in \mathbb{Z}^2$ in einem Kreis ist asymptotisch gleich dem Volumen des Kreises. Hermann Minkowski fragte, unter welchen Umständen eine Menge einen Gitterpunkt notwendig enthalten muss. Dass dies eine für zahlentheoretische Fragestellungen relevante Beobachtung ist, entnehmen wir bereits dem nachstehenden Zitat

> "Wir verdanken Minkowski die fruchtbare Beobachtung, dass gewisse Resultate, welche sich nahezu intutitiv durch Betrachtung von Figuren im n-dimensionalen euklidischen Raum ergeben, weitreichende Konsequenzen in verschiedenen Zweigen der Zahlentheorie besitzen."[13]

[9] Jarník wurde 1897 in Prag geboren, studierte und promovierte dort, wurde in Prag darüber hinaus auch Professor und verstarb 1970 ebendort. Wichtig für seine Entwicklung war sicherlich der Aufenthalt beim einflussreichen Edmund Landau in Göttingen, der sich ab 1912 selbst eingehend mit dieser Thematik beschäftigte. Jarník ist bekannt für seine Arbeiten zu Gitterpunkten in konvexen Körpern; in den 1940ern kamen auch Studien zur Geometrie der Zahlen hinzu.

[10] Ohne Fehlerterm kommt hingegen folgender erstaunlicher Satz von Georg Alexander Pick [115] aus: Ist $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ ein konvexes Polygon mit Eckpunkten in $\mathbb{Z}^2$ und nicht-leerem Inneren, dann gilt $\sharp(\Pi \cap \mathbb{Z}^2) = \mathrm{vol}(\Pi) + \frac{1}{2}\sharp(\partial\Pi \cap \mathbb{Z}^2) + 1$, wobei $\partial\Pi$ für den Rand von Π steht.

[11] Wie Pólya selbst schrieb, geht diese Fragestellung auf seinen Zürcher Kollegen und bekannten Gruppentheoretiker Andreas Speiser zurück.

[12] und erste quantitative Abschätzungen in dieser Richtung finden sich bereits in der Arbeit [30] von einmal mehr Dirichlet. Eine nette Variante hiervon wird von Herzog & Steward [61] behandelt: Welche Gitterpunkte sind von einem oder mehreren Gitterpunkten aus sichtbar? Durch Hinzuziehen weiterer Standpunkte erweitert sich natürlich die insgesamt sichtbare Menge der Gitterpunkte; Laison & Schick [83] zeigten, dass eine Teilmenge $U \subset \mathbb{Z}^2$ genau dann unter Zuhilfenahme endlich vieler Standpunkte gesehen werden kann, wenn U für keine Primzahl p ein perfektes Quadrat modulo p enthält.

[13] unsere Übersetzung aus dem englischen Original: "We owe to Minkowski the fertile observation that certain results which can be made almost intuitive by the consideration of figures in n-dimensional euclidean space have far-reaching consequences in diverse branchses in number theory."

von John William Scott Cassels in seinem Klassiker [14], S. 1. Ein Beispiel illustriert diese geometrische Herangehensweise an gewisse zahlentheoretischen Fragestellungen: Zu einer gegebenen reellen Zahl α soll die Existenz einer möglichst guten rationalen Approximation nachgewiesen werden. Das Maß der Güte einer rationalen Näherung $\frac{x}{y}$ ist dabei die Größe des Nenners. Insofern ist es naheliegend, zu gegebenem ganzzahligen $Q > 1$ die beiden Ungleichungen

$$|y| \leq Q \qquad \text{und} \qquad |y\alpha - x| < \frac{1}{Q} \tag{1}$$

in ganzen Zahlen x und y erfüllen zu wollen; wenn wir vom trivialen Fall $x = y = 0$ absehen und also $y \geq 1$ fordern, folgt nämlich aus einer solchen Lösung

$$\left|\alpha - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{yQ} \leq \frac{1}{y^2}. \tag{2}$$

Der klassische Approximationssatz von Dirichlet [30] besagt, dass zu jedem reellen α und jeder natürlichen Zahl Q es ganze Zahlen x und y gibt, so dass (2) erfüllt ist; wenn darüber hinaus α irrational ist, so gibt es sogar unendlich viele x und y mit dieser Eigenschaft, während es im Falle rationaler α nur endlich viele solcher Paare gibt.[14] Für einen geometrischen Beweis ist also zunächst ein Punkt (x, y) mit ganzzahligen Koordinaten verschieden vom Ursprung $(0, 0)$ gesucht, der im Inneren des durch die Ungleichungen (1) beschriebenen achsensymmetrischen Quaders beschrieben ist. Wenn dieser Quader genügend groß ist, dann wird er sicherlich einen solchen Gitterpunkt im Inneren besitzen, und die gewünschte Approximation ist gefunden!

Nun gilt es, diesen intuitiv einsichtigen Sachverhalt tatsächlich zu beweisen. Im Folgenden betrachten wir euklidische Vektorräume $\mathbb{R}^n$ mit stets $n \geq 2$ und dem üblichen euklidischen Abstand. Wir denken uns den $\mathbb{R}^n$ gegeben als Menge von Vektoren $\mathsf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ mit reellen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ versehen mit der komponentenweise Addition

$$\mathsf{x} + \mathsf{y} = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

und der skalaren Multiplikation

$$\lambda \mathsf{x} = \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

für reelle λ. Der Abstand zwischen zwei Punkten ist dann über den Satz des Pythagoras gegeben durch

$$d(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Unserem räumlichen Vorstellungsvermögens geschuldet mag man für die folgenden Ausführungen zunächst an den zweidimensionalen Fall denken; sämtliche Ideen lassen sich unschwer auf den allgemeinen Fall übertragen.

Minkowskis grundlegende Erkenntnis ist die intuitiv sofort einsichtige wenngleich unpräzise Beobachtung, dass eine hinreichend große Menge nur dann keinen vom Ursprung $\mathsf{0} = (0, \ldots, 0)$ verschiedenen Gitterpunkt (mit also ganzzahligen Koordinaten) besitzen kann, wenn sie nicht von spezieller Form ist. Die notwendige Präzisierung erlaubt der Begriff der Konvexität (lat. convexus für 'gewölbt'). Dieser spielt tatsächlich eine zentrale Rolle. In der Optik finden sich erste Ideen zur Verwendung gewölbter Oberflächen zur Vergrößerung bereits in den Schriften des arabischen Universalgelehrten Abu Ali al-Hasan ibn al-Haitham (ca. 965 - 1040); ab dem

[14] Dirichlet [29] selbst bewies dies und mehrdimensionale Analoga mit einem Schubfachschluss, der ihm oft fälschlicherweise als Urheber zugesprochen wird, obwohl diese Schlussweise bereits bei Jean Leurechon im 17 Jahrhundert vorkommt (cf. Heeffer & Rittaud [59]). Tatsächlich gibt es neben seinem und dem Minkowskischen Beweis noch weitere Beweise (etwa mittels Kettenbrüchen).

zwölften Jahrhundert fertigten zunächst Mönche aus Beryll erste Linsen (deshalb 'Brille'); die ersten Mikrospkope und Fernrohre wurden gegen Ende des 16. Jahrhunderts von wohl Hans Lippershey und Zacharias Janssen in Holland entwickelt (und kopiert und in eindrucksvoller Weise eingesetzt durch Galileo Galilei).

Minkowski folgend heißt eine Menge $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ konvex, falls für je zwei beliebige $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathcal{C}$ das verbindende Liniensegment $[\mathsf{x}, \mathsf{y}] := \{\ell\mathsf{x}+(1-\ell)\mathsf{y} \,:\, 0 \leq \ell \leq 1\}$ ganz in der Menge $\mathcal{C}$ enthalten ist.[15] Ferner heißt eine Menge $\mathcal{C}$ symmetrisch, wenn mit $\mathsf{x} \in \mathcal{C}$ stets auch $-\mathsf{x} \in \mathcal{C}$ gilt (oder kurz $\mathcal{C} = -\mathcal{C}$). Nennen wir nun noch eine konvexe Menge $\mathcal{C}$, die nicht in einer Hyperebene enthalten ist, einen konvexer Körper, so können wir den ersten Satz von Minkowski formulieren:

Minkowskis Gitterpunktsatz (1891). Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ ein symmetrischer konvexer Körper mit einem Volumen $\mathrm{vol}(\mathcal{C}) > 2^n$. Dann enthält $\mathcal{C}$ mindestens einen von 0 verschiedenen Gitterpunkt z.

Eine beschränkte konvexe Menge besitzt stets ein wohldefiniertes endliches Volumen $\mathrm{vol}(\mathcal{C})$, wie eine approximierende Ausschöpfung von $\mathcal{C}$ durch Quader zeigt; auch im Falle $n = 2$ verwenden wir die Notation vol für die Fläche. Besitzt $\mathcal{C}$ unendliches Volumen, so ist die notwendige Ungleichung insbesondere erfüllt.

Ein einfacher Beweis hiervon nach Louis J. Mordell [105] basiert auf der Ausschöpfung des konvexen Körpers durch immer kleinere Quader ähnlich der Approximation von Integralen durch immer feinere Riemann-Summen. Wir argumentieren im Folgenden nur für die Ebene (also $n = 2$); der allgemeine Fall geht ganz analog. Sei t eine natürliche Zahl. Dann definieren die Gleichungen

$$x_j = \frac{2}{t} z_j \qquad \text{für} \quad j = 1, 2 \quad \text{mit} \quad z_j \in \mathbb{Z}$$

achsenparallele Geraden, welche die Ebene in Quadrate der Fläche $(\frac{2}{t})^2$ zerlegen. Bezeichnet nun $N(t)$ die Anzahl der Ecken dieser Quadrate in $\mathcal{C}$, so gilt

$$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{2}{t}\right)^2 N(t) = \mathrm{vol}(\mathcal{C}).$$

Wegen $\mathrm{vol}(\mathcal{C}) > 2^2$ ist $N(t) > t^2$ für hinreichend große t. Andererseits liefern die Pärchen (z_1, z_2) ganzer Zahlen höchstens t^2 verschiedene Paare von Resten bei Division der z_j durch t. Demzufolge enthält $\mathcal{C}$ sicherlich zwei verschiedene Punkte

$$\mathsf{P}_1 := \left(\frac{2z_1^{(1)}}{t}, \frac{2z_2^{(1)}}{t}\right), \quad \mathsf{P}_2 := \left(\frac{2z_1^{(2)}}{t}, \frac{2z_2^{(2)}}{t}\right),$$

so dass sämtliche $z_j^{(1)} - z_j^{(2)}$ durch t teilbar sind. Aufgrund der Symmetrie von $\mathcal{C}$ ist $-\mathsf{P}_2 \in \mathcal{C}$. Damit besitzt der Mittelpunkt

$$\mathsf{M} = \left(\frac{z_1^{(1)} - z_1^{(2)}}{t}, \frac{z_2^{(1)} - z_2^{(2)}}{t}\right)$$

von P_1 und $-\mathsf{P}_2$ ganzzahlige Koordinaten, und mit der Konvexität ist $\mathsf{M} \in \mathcal{C}$. Wegen $\mathsf{P}_1 \neq \mathsf{P}_2$ ist $\mathsf{M} \neq 0$. Somit ist der Satz (zumindest für die Ebene) bewiesen.

---

[15]Bereits bei Archimedes [2] findet sich eine verwandte Definition konvexer Kurven und Flächen. Tatsächlich vermeidet Minkowski diesen Begriff zunächst und spricht von nirgends konkaven Mengen; später heißt es dann "Eine nirgends concave Fläche soll als überall convex bezeichnet werden, wenn jede Stützebene an die Fläche mit derselben nur einen Punkt gemein hat." [98], S. 38. In moderner Terminologie werden die Ergebnisse durchweg für konvexe Mengen formuliert. Übrigens heißt 'konkav' 'einwärts gewölbt' und stammt ab von dem Lateinischen 'concavus'.

Bislang haben wir den Begriff des Gitters synonym für die Menge $\mathbb{Z}^n$ verwendet. Allgemein verstehen wir unter einem Gitter Λ in einem euklidischen Raum V eine diskrete additive Untergruppe von V, deren Erzeugnis ganz V ist. Im $\mathbb{R}^n$ lässt sich mit ein wenig linearer Algebra ein solches Gitter stets darstellen als

$$\Lambda = \{m_1\mathrm{z}_1 + \ldots + m_n\mathrm{z}_n \,:\, m_j \in \mathbb{Z}\} =: \mathrm{z}_1\mathbb{Z} + \ldots + \mathrm{z}_n\mathbb{Z}$$

mit gewissen in $\mathbb{R}^n$ linear unabhängigen $\mathrm{z}_1, \ldots, \mathrm{z}_n$; diese Vektoren z_j bilden eine so genannte Basis des Gitters.[16] Der Fundamentalbereich von Λ ist definiert durch

$$\mathcal{F} = \{\lambda_1\mathrm{z}_1 + \ldots + \lambda_n\mathrm{z}_n \,:\, 0 \leq \lambda_j < 1\}\};$$

die Determinante des Gitters ist gegeben durch die $n \times n$-Determinante

$$\det(\Lambda) = |\det(\mathrm{z}_1, \ldots, \mathrm{z}_n)|$$

und entspricht dem Volumen von $\mathcal{F}$ (welches $\neq 0$ ist auf Grund der linearen Unabhängigkeit der Spaltenvektoren z_j). Obwohl die Basis eines Gitters keinesfalls eindeutig bestimmt ist, hängt der Wert der Determinante nicht von der Wahl der Basis ab (wie ein wenig lineare Algebra zeigt).

Die bijektive lineare Abbildung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_{11} & \ldots & z_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \ldots & z_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathrm{z}_j = \begin{pmatrix} z_{1j} \\ \vdots \\ z_{jn} \end{pmatrix}$$

bildet das Standardgitter $\mathbb{Z}^n$ auf Λ ab. Dabei werden (symmetrische) konvexe Körper des x-Raumes in ebensolche im y-Raum abgebildet, wobei sich die entsprechenden Volumina proportional um das Verhältnis der Volumina der Fundamentalbereiche, also den Faktor $\det(\Lambda)$ verändern.[17] Wäre beispielsweise $n = 2$ und Λ erzeugt durch die Vektoren $\binom{2}{0}$ und $\binom{1}{1}$, so ergäbe sich das von diesen beiden Vektoren aufgespannte Parallelogramm als Fundamentalbereich und Λ bestünde aus allen Gitterpunkten von $\mathbb{Z}^2$ mit gerader Koordinatensumme:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\mathbb{Z} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\mathbb{Z} = \{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \,:\, a \equiv b \bmod 2\}.$$

Ganz allgemein ergibt sich so

Minkowskis Gitterpunktsatz (allgemeine Version). Es sei $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter und $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ ein symmetrischer konvexer Körper mit einem Volumen $\mathrm{vol}(\mathcal{C}) > 2^n \det(\Lambda)$. Dann enthält $\mathcal{C}$ mindestens einen vom Ursprung 0 verschiedenen Gitterpunkt $\mathrm{z} \in \Lambda$.

Gilt hingegen $\mathrm{vol}(\mathcal{C}) \geq 2^n \det(\Lambda)$, so folgt mit einem Stetigkeitsargument die Existenz eines von 0 verschiedenen Gitterpunktes in $\mathcal{C}$ oder auf seinem Rand.

Mit dem Minkowskischen Gitterpunktsatz wird in der Tat das geometrische Konzept der Konvexität für arithmetische Fragestellungen nutzbar gemacht. Wir illustrieren dies mit folgendem weiteren, auf Harold Davenport [24] zurückgehenden Beispiel aus der klassischen Zahlentheorie, nämlich einem Beweis des Zweiquadratesatzes von Fermat[18]:

---

[16] In diesem Zusammenhang sei erwähnt, dass ganzzahlige Linearkombinationen von über $\mathbb{R}$ linear abhängigen Vektoren keine diskrete Menge bilden.

[17] Beim strengen mathematischen Beweis geht hier die Transformationsformel der Analysis ein.

[18] Fermats Beweis von ca. 1640 ist nicht überliefert, wahrscheinlich argumentierte Fermat mit seiner Abstiegsmethode; siehe hierzu Scharlau & Opolka [112], S. 8. Den ersten bekannten Beweis erbrachte Leonhard Euler 1749.

Es gilt zu zeigen, dass jede Primzahl $p \equiv 1 \mod 4$ als Summe zweier Quadrate ganzer Zahlen geschrieben werden kann, wie z.B. $30\,449 = 100^2 + 143^2$. Für den Beweis betrachten wir das Gitter

$$\Lambda = \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{Z} + \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2 \qquad \text{mit} \quad q^2 \equiv -1 \mod p.$$

Dass solch ein q tatsächlich existiert, überlegen wir uns wie folgt: Zu jedem mit p teilerfremden a existiert ein multiplikativ Inverses a^{-1} modulo p, welches genau dann von a verschieden ist, wenn $a \not\equiv \pm 1 \mod p$ gilt. Entsprechende Pärchenbildung in dem nachstehenden Produkt zeigt

$$-1 \equiv p! \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left((\tfrac{p-1}{2})! \right)^2 \mod p,$$

womit also explizit $q = (\frac{p-1}{2})!$ Gewünschtes leistet.[19] Die Fläche des Kreises $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2p\}$ beträgt $2\pi p > 4p = 2^2 \det \Lambda$, womit nach dem Minkowskischen Gitterpunktsatz ein $(a,b) \in \mathcal{C} \cap \Lambda$ verschieden vom Ursprung existiert. Aus der Darstellung

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit gewissen $k, j \in \mathbb{Z}$ folgt durch Einsetzen

$$a^2 + b^2 \equiv j^2(q^2 + 1) \equiv 0 \mod p$$

nach Wahl von q. Also ist $a^2 + b^2$ ein Vielfaches von p, sicherlich kleiner $2p$, aber nicht 0. Dies beweist den Zweiquadratesatz.

Ganz ähnlich zeigt man den Vierquadratesatz von Lagrange, dass jede natürliche Zahl sich als eine Summe von vier Quadraten darstellen lässt. Und tatsächlich hat Davenport [24] diesen Satz geometrisch bewiesen. Hier wird zunächst die Normengleichung für Quaternionen zum Anlass genommen, dass die Menge der als Summe von vier Quadraten darstellbaren ganzen Zahlen multiplikativ abgeschlossen ist, und man sich beim Nachweis der Aussage des Satzes auf Primzahlen $p \equiv 3 \mod 4$ zurückziehen kann.[20] Sogar die noch tiefere Charakterisierung der Zahlen, die sich als Summe von drei Quadraten darstellen lassen, welche zuerst Gauß fand (und welche seinen Satz über Dreieckszahlen aus dem ersten Paragraphen zur Folge hat), gelang Nesmith Ankeny [1] mit dem Minkowskischen Gitterpunktsatz; Vereinfachungen zu seinem Beweis gaben Louis Mordell [109] und Jan Wójcik [147].

4. Der junge Hermann Minkowski

Nur selten wurde eine Theorie dermaßen von einer einzelnen Person in die Welt gesetzt und ihre Fundamente in eine ansprechende Form gebracht, wie es Minkowski mit seiner Geometrie der Zahlen gelang. Tatsächlich waren die Randbedingungen für die Schöpfung dieser Zahlengeometrie hervorragend. Im Folgenden widmen wir uns den näheren Lebensumständen von Minkowski und stellen die Sichtweise auf Geometrie und Zahlentheorie in seiner Zeit kurz dar.

Hermann Minkowski wurde am 22. Juni 1864 im russischen Dörfchen Aleksotas (heute ein Stadtteil von Kaunas in Litauen) geboren und ging dort kurze Zeit zur Schule, bevor

---

[19] Dies ist eine Variante des klassischen Satzes von Wilson. Das erste Ergänzungsgesetz aus der Theorie der quadratischen Reste liefert unmittelbar die Existenz eines solchen q.

[20] Der Vierquadratesatz gilt auch in einigen Ganzheitsringen quadratischer Zahlkörper; so bewies Fritz Götzky [49] dessen Gültigkeit in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. In der Arbeit von Jesse Ira Deutsch [26] wird ein Beweis mit Minkowskis Geometrie der Zahlen gegeben.

die Familie wegen judenfeindlichen Repressalien[21] ins nahe preussische Königsberg (heute Kaliningrad in Russland) umzog. Hermann starb unerwartet früh am 12. Januar 1909 an einer Blinddarmentzündung in Göttingen. Sein älterer Bruder Oskar war ein bedeutender Mediziner, der den Zusammenhang zwischen Blutzucker und der Aktivität der Bauchspeicheldrüse, was letztlich zur Entwicklung von Insulin führte und Oskar den Spitznamen Großvater des Insulins einbrachte. Ferner war er Vater des Astrophysikers Rudolph Minkowski und während des ersten Weltkrieges 'Giftgasexperte' auf deutscher Seite. Die Brüder Hermann und Oskar liegen in Berlin begraben.

Bereits als Siebzehnjähriger sorgte Hermann Minkowski mit seiner Arbeit [93] zu Darstellungen von natürlichen Zahlen als Summe von fünf Quadraten für Aufsehen und erhielt gemeinsam mit Henry J.S. Smith 1883 den Preis der Pariser Akademie.[22] Kurioserweise war das von der Akademie gestellte Problem bereits 1868 von Smith gelöst worden, die Lösung aber weitgehend unbemerkt geblieben. Minkowski eröffnete mit seinem Ansatz jedoch das Studium der Formen beliebig vieler Variablen.[23] Zu dieser Zeit nimmt er sein Studium an der hiesigen Königsberger Universität auf. Unter seinen akademischen Lehrern hat wohl Adolf Hurwitz den größten Einfluss auf ihn ausgeübt. Unter seinen wenigen Kommilitonen befindet sich ein weiterer begnadeter Mathematiker: David Hilbert. Schon bald verbindet die beiden eine enge Freundschaft, die sehr schön in den gesammelten Briefen von Minkowski an Hilbert [104] dokumentiert ist.[24] Gemeinsam mit ihrem Lehrer und väterlichen Freund Hurwitz unternehmen die Drei regelmäßige Spaziergänge; "Anregungen vermittelten das Mathematische Kolloquium [...], vor allem aber die Spaziergänge mit Hurwitz 'nachmittags präzise 5 Uhr nach dem Apfelbaum' " liest man bei Otto Blumenthal [6], dem ersten Doktoranden Hilberts, zu dieser für das Dreigespann prägenden Zeit. Minkowski studierte zu dieser Zeit auch drei Semester im fernen Berlin und widmete seine Forschungen in dieser Phase seines Schaffens weiterhin den quadratischen Formen; er promovierte 1885 bei Lindemann zu eben diesem Thema. Ferdinand Lindemann (1852-1939) hatte 1882 die Transzendenz von π bewiesen und war im darauffolgenden Jahr auf eine Professur in Königsberg berufen worden.[25]

1887 erlangte Minkowski ein Ruf an die Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn. In der zugehörigen Probevorlesung vom 15. März 1887 legte er die mit der Rufannahme verbundene Habilitationsschrift Räumliche Anschauung und Minima positiv definiter quadratischer Formen, welche erst mehr als einhundert Jahre später 1991 posthum [128] publiziert wurde. In dieser äußerte Minkowski erste Gedanken zur Geometrie der Zahlen.

[21]beispielsweise Studienbeschränkung für Juden; der älteste Bruder Max ging beispielsweise ins benachbarte preussische Insterburg (heute Tschernjachowsk in der russischen Enklave um Kaliningrad) aufs Gymnasium; Bruder Oskar war der erste Jude am Gymnasium in Kaunas). Die begabte jüngere Tochter Fanny hingegen besuchte nicht das Gymnasium und "war Zeit ihres Lebens gegen das Frauenstudium eingestellt", wie Lily Rüdenberg, die älteste Tochter Hermann Minkowskis zu berichten weiß ([104], S. 13). Frauen hatten zu der Zeit nur an wenigen europäischen Universitäten Zugang.

[22]Der berühmte Physiker Max Born [10], S. 501, berichtet hierzu: "So erzählt Hilbert, daß Minkowski schon als Student im ersten Semester für die Lösung einer mathematischen Aufgabe eine Geldprämie erhielt; er verzichtete aber darauf zugunsten eines armen Mitschülers und verheimlichte die ganze Sache seiner Familie. Sie ist nur ein Beispiel seiner Güte und Bescheidenheit, die alle Menschen erfuhren, welche mit ihm in Berührung kamen."

[23]siehe auch Band 1; zu den frühen Jahren verweisen wir auf Strobl [136].

[24]Die Briefe von Hilbert an Minkowski sind leider nicht erhalten.

[25]In Minkowskis Briefen [104] an Hilbert finden sich mehrere Stellen, in denen Lindemanns Mathematik deutlich kritisiert wird, so etwa "Lindemanns Arbeit ist bei näherem Zusehen unter aller Kanone." in dem Brief vom 20. September 1901, [104], S. 144.

Prominente Vorläufer im Geiste hat Minkowski mit seiner geometrischen Herangehensweise an quadratische Formen in den Größen Gauß und Dirichlet. Zunächst hatte der Physiker Ludwig August Seeber [130] 1831 im Rahmen der Reduktionstheorie quadratischer Formen mit einer monumentalen und undurchsichtigen Arbeit gezeigt, dass die Determinante einer reduzierten positiv definiten ternären quadratischen Form mindestens halb so groß wie das Produkt der Diagonaleinträge ist. In seiner umfangreichen Rezension der Seeberschen Arbeit [44] lieferte Gauß hierfür mit einem geometrischen Ansatz einen ersten vollständigen Beweis; schließlich gelang Dirichlet 1848 (publiziert jedoch erst 1850 als [31]) eine kurze und einfache Darstellung. Er beginnt seine Ausführungen gegenüber der physikalisch-mathematischen Klasse der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften am 31. Juli 1848 in Berlin mit den Worten:[26]

> "Indem ich jetzt der Classe das Resultat meiner dahin gerichteten Bemühungen mitzutheilen mir erlaube, glaube ich im Interesse der Kürze, und wenn ich sagen darf, der Durchsichtigkeit der Darstellung, die geometrische Form beibehalten zu müssen, worin ich die Untersuchung geführt habe, der ich die merkwürdigen Beziehungen zu Grunde gelegt habe, welche zwischen den quadratischen Formen mit zwei oder drei Elementen und gewissen räumlichen Gebilden Statt finden. "

Hauptergebnis der Minkowskischen Habilitationsschrift ist denn auch die Abschätzung des Minimums einer positiv definiten quadratischen Form im Sinne der Vorarbeiten von Gauß und Dirichlet, diese aber noch weit übertreffend. Joachim Schwermer [128],S. 54, schreibt hierzu: "Die Frage nach dem Minimum einer positiv definiten quadratischen Form liegt damit an der Quelle des Entstehens der 'Geometrie der Zahlen'. Die Probevorlesung gibt ein frühes Zeugnis hierfür belegt zugleich, Minkowskis geometrische Ideen zu dieser Zeit und zeigt, daß er sich der arithmetischen Tragweite seiner Überlegungen schon bewußt war." Allerdings berichtet Minkowski erst in einem Brief an Hilbert, datiert 6. November 1889, von ersten Konsequenzen:[27]

> "Vielleicht interessirt Sie oder Hurwitz der folgende Satz (den ich auf einer halben Seite beweisen kann): In einer positiven quadratischen Form von der Determinante D mit n (≥ 2) Variabeln kann man stets den Variabeln solche ganzzahligen Werthe geben, daß die Form $< nD^{\frac{1}{n}}$ ausfällt. Hermite hat hier für den Coefficienten n nur $(\frac{4}{3})^{\frac{1}{2}(n-1)}$, was offenbar im Allgemeinen eine sehr viel höhere Grenze ist."

Der angesprochene bedeutende Mathematiker Charles Hermite (1822-1901) hatte in Briefen mit Carl Gustav Jacobi neue Wege in der arithmetischen Analyse quadratischer Formen beschritten. In einem Brief [60] vom 6. August 1845 war ihm die besagte Abschätzung mittels eines ausgeklügelten Induktionsbeweises gelungen. Seine Schranke für dieses erste positive Minimum einer positiv definiten quadratischen Form erlaubt etliche Anwendungen und sie ist für Minkowski der wesentliche Antrieb, seine Studien zu quadratischen Formen aufzunehmen und letztlich die Geometrie der Zahlen zu entwickeln (siehe hierzu auch Schwermer [128], S. 51/52).[28] Angesichts der Minkowskischen Ergebnisse äußerte Hermite später "Je crois voir la

[26] [31], S. 29

[27] cf. [104], S. 38

[28] Eine Form heißt positiv definit, wenn sie keine negativen Werte annimmt. Indefinite Formen sind wesentlich schwieriger zu behandeln. Beispielsweise korrespondieren die Darstellungen der Null durch die Form $X^2 + Y^2 - Z^2$ mit den pythagoräischen Tripeln.

terre promise" (cf. Hilbert [65], S. 206, bzw. [104], S. 62). Etwas später verbesserte Minkowski [95] sein Resultat noch leicht:

Minkowskis Satz über das erste Minimum einer quadratischen Form (1891). Sei Q eine positiv definite quadratische Form in den Unbekannten $X_1, \ldots, X_n$ mit Determinante D, dann existieren ganze Zahlen $x_1, \ldots, x_n$, nicht alle null, so dass

$$Q(x_1, \ldots, x_n) \leq \tfrac{4}{\pi}\Gamma(\tfrac{n}{2}+1)^{\frac{2}{n}} D^{\frac{1}{n}}.$$

Die Gamma-Funktion tritt (wie auch schon beim Kreisproblem) als Maßzahl für das Volumen der n-dimensionalen Kugel auf. Für $n \geq 4$ sticht Minkwoskis Schranke Hermites Abschätzung aus. Die Hermite-Konstante γ_n ist definiert als das Infimum[29], für die x $\in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ mit $Q(\mathrm{x}) \leq \gamma_n D^{\frac{1}{n}}$ existiert. Mit der Stirlingschen Formel[30] erweist sich Minkowskis Schranke $\gamma_n \leq (1 + o(1))\frac{2n}{\pi e}$ insbesondere für große n als wesentlich kleiner. Später erzielte Blichfeldt [5] eine noch bessere Schranke für die Hermite-Konstante, nämlich

$$\gamma_n \leq \frac{2}{\pi}\Gamma(2+\tfrac{n}{2})^{\frac{2}{n}} = (1+o(1))\frac{n}{\pi e}.$$

Übrigens sind nur wenige Werte der Hermite-Konstanten γ_n explizit bekannt: $\gamma_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ folgt leicht aus der Theorie der binären quadratischen Formen. Der Wert $\gamma_3 = \sqrt[8]{2}$ gebührt Gauß [44] in seiner oben zitierten Rezension der Seeberschen Arbeit. Aleksandr Nikolaevich Korkin und Egor Ivanovich Zolotarev [80, 81] zeigten $\gamma_4 = \sqrt{2}$ sowie $\gamma_5 = \sqrt[5]{8}$ noch vor Minkowskis Arbeiten. Mit weiterentwickelten Methoden der Geometrie der Zahlen findet Hans Frederik Blichfeldt in den 1920ern weitere Werte bis einschließlich $n = 8$ (siehe Cassels [14]). Darüberhinaus ist noch $\gamma_{24} = 4$ bekannt (wofür das Leech-Gitter verantwortlich; siehe §11).

Hilbert schreibt zu Minkowskis Verbesserung der Hermiteschen Schranke für quadratische Formen in seiner Gedächtnisrede auf seinen Freund Minkowski:[31]

> "Dieser Beweis eines tiefliegenden zahlentheoretischen Satzes ohne rechnerische Hilfsmittel wesentlich auf Grund einer geometrisch anschaulöichen Betrachtung ist eine Perle Minkowskischer Erfindungskunst. Bei der Verallgemeinerung auf Formen mit n Variablen führt der Minkowskische Beweis auf eine natürliche und weit kleinere obere Schranke für jedes Minimum M, als sie bis dahin Hermite gefunden hatte. Noch wichtiger aber als dies war es, daß der wesentliche Gedanke des Minkowskischen Schlußverfahrens nur die Eigenschaft des Ellipsoides, daß dasselbe eine konvexe Figur ist und einen Mittelpunkt besitzt, benutzte und daher auf beliebige konvexe Figuren mit Mittelpunkt übertragen werden konnte. Dieser Umstand führte Minkowski zum ersten Male zu der Erkenntnis, daß überhaupt der Begriff des konvexen Körpers ein fundamentaler Begriff in unserer Wissenschaft ist und zu den fruchtbarsten Forschungsmitteln gehört."

5. Die Geometrie der Zahlen entwickelt sich

Die Geometrie fesselte den jungen Minkowski. Bereits 1887 schrieb Minkowski an Hilbert "Ich bin auch ganz Geometer geworden, und bedaure aus diesem Grunde doppelt, nicht in

[29] Leser_innen, die den Begriff Infimum nicht kennen, sei mitgeteilt, dass dies die größte untere Schranke ist; das Minimum einer Menge existiert nämlich i.A. nicht. Analog erklärt man auch das Supremum als die kleinste obere Schranke.

[30] $\Gamma(x+1) = x! \sim \sqrt{2\pi x}(x/e)^x$ bei $x \to \infty$

[31] [65], S. 202/3

Ihrem Kreise weilen zu können." [104], S. 33/34. Das förmliche 'Sie' weicht erst zwei Jahre später dem vertrauten 'Du'. Minkowskis Zeit in Bonn hat jedoch auch ihre schlechten Seiten. Hierzu äußerte Minkowski, wiederum gegenüber seinem Freund Hilbert, "man ist hier ein reiner mathematischer Eskimo" über seine Zeit in Bonn in einem Brief datiert vom 23. Februar 1893 (siehe [104], S. 51).[32] Andererseits gelingen Minkowski viele bemerkenswerte Resultate; die Ideen seiner Habilitationsschrift sind sehr fruchtbar.[33]

In dieser Zeit findet Minkowski vielfältige Anwendungen seiner geometrischen Methode, etwa in der diophantischen Approximationstheorie und auch in der algebraischen Zahlentheorie [94]; den Beweis seines Gitterpunktsatzes (aus §3) mit diversen Anwendungen legt Minkowski mit der wichtigen Arbeit [95] vor.[34] Die Vielseitigkeit ist in seiner geometrischen Herangehensweise selbst begründet: Behandelte Minkowski in seinen geometrischen Untersuchungen zunächst quadratische Formen, kristallisieren sich nunmehr die Linearformen als zentrales Thema heraus. Eine homogene Linearform Y_j in den Variablen $X_1, \ldots, X_n$ mit reellen Koeffizienten α_{ij} ist gegeben durch

$$Y_j(\mathrm{X}) = Y_j(X_1, \ldots, X_n) = \alpha_{j1}X_1 + \ldots + \alpha_{jn}X_n.$$

Unter der Annahme, dass die den Linearformen zugeordnete Determinante $\det(\alpha_{jk})$ nicht verschwindet, bilden die von ganzen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ herrührenden Tupel $(Y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, Y_n(x_1, \ldots, x_n))$ ein Gitter $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ mit $\det(\Lambda) = |\det(\alpha_{jk})|$. Anwenden des Minkowskischen Gitterpunktsatzes auf den durch die Ungleichungen $|Y_1(\mathrm{X})| \leq \lambda_1 \ldots, |Y_n(\mathrm{X})| \leq \lambda_n$ definierten symmetrisch konvexen Körper $\mathcal{C}$ und der Gitterpunktsatz liefert die Existenz ganzer Zahlen $x_1, \ldots, x_n$, nicht alle null, für die sämtliche Linearformen klein werden. Im Falle verschwindender Determinante ist $\mathcal{C}$ unbeschränkt und eine entsprechende Abschätzung gilt trivialerweise:

Minkowskis Linearformensatz (1891). Seien Linearformen $Y_1, \ldots, Y_n$ gegeben. Für $\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \geq |\det(\alpha_{jk})|$ existiert $\mathrm{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, so dass

$$|Y_j(\mathrm{x})| \leq \lambda_j \qquad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n.$$

Dies lässt sich auf Linearformen mit komplexen Koeffizienten α_{jk} ausdehnen. Hierfür bildet man Paare konjugiert komplexer Linearformen Y_k, Y_{k+1} und ordnet diesen folgendermaßen reelle Paare zu:

$$\mathcal{Y}_k = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(Y_k + Y_{k+1}) \quad \text{und} \quad \mathcal{Y}_{k+1} = \tfrac{1}{\sqrt{2}i}(Y_k - Y_{k+1})$$

(ähnlich den Darstellungen von cos und sin durch die Exponentialfunktion).

Minkowskis Linearformensatz, komplexe Version (1891). Gegeben s Paare von Linearformen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2s-1}, Y_{2s}$ mit jeweils komplex konjugierten Koeffizienten α_{ij} und weitere $r =$

---

[32] Die Mathematik an der Universität Bonn war seinerzeit dominiert durch den bekannten Analytiker Rudolf Lipschitz, der allerdings zu Minkowskis Zeit gesundheitliche Probleme hatte; Heutzutage erfreut sich Bonn einer Vielzahl hervorragender Mathematik.

[33] Hilbert schreibt in besagter Gedächtnisrede auf Minkowski: "Nunmehr beginnt für Minkowskis mathematische Produktion die reichste und bedeutendste Epoche; seine bisher auf das spezielle Gebiet der quadratischen Formen gerichteten Untersuchungen erhalten mehr und mehr den großen Zug ins Allgemeine und gipfeln schließlich in der Schaffung und dem Ausbau der Lehre, für die er selbst den treffenden Namen "Geometrie der Zahlen"geprägt hat und die er in dem großartig angelegten Werk gleichen Titels dargestellt hat." [65], S. 201

[34] Hier findet sich auch die erste Definition von Gittern im $\mathbb{R}^n$; Hlawka würdigte dies mit der Anmerkung: "Damals hatte der $\mathbb{R}^n$ für $n > 3$ noch lange nicht sein Bürgerrecht in der Mathematik erworben." [70], S. 10.

$n-2s$ Linearformen $Y_{2s+1},\ldots,Y_n$ mit reellen Koeffizienten. Dann existieren ganze Zahlen $x_1,\ldots,x_n$, nicht alle null, so dass

$$|Y_j(x_1,\ldots,x_n)| \leq \left(\tfrac{2}{\pi}\right)^{\frac{s}{n}} |\det(\alpha_{jk})|^{\frac{1}{n}} \qquad \text{für} \quad j=1,\ldots,n.$$

Mit einem Stetigkeitsargument kann man hier alle bis auf ein Relationszeichen '$\leq$' durch strikte '$<$' austauschen.

Mit den Sätzen zu Linearformen ergibt sich beispielsweise folgende Verschärfung des Dirichletschen Approximationssatzes: Gegeben reelle Zahlen $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, existieren ganze Zahlen $p_1,\ldots,p_n$ und $q\geq 1$ mit

$$\left|\alpha_j - \frac{p_j}{q}\right| < \frac{n}{n+1}\frac{1}{q^{1+\frac{1}{n}}} \qquad \text{für} \quad j=1,\ldots,n.$$

Dirichlet hatte hier nur den Faktor 1 statt $\frac{n}{n+1}$.

"Alle Theoreme hier wiesen einen Ursprung auf, wir schöpften sie aus einer gemeinsamen, sehr durchsichtigen Quelle, die ich als das Prinzip der zentrierten konvexen Körper im Zahlengitter bezeichnen möchte." schreibt Minkowski [103], S. 234/235, in ähnlichem Zusammenhang; er fährt fort mit den Worten "Nun sind wir in der Tat eine Strecke Wegs in das Reich der heutigen Zahlentheorie eingedrungen. Wir können daran denken, uns auf diesem Boden zu akklimatisieren." Und tasächlich ergeben sich unmittelbar weitere Anwendungen. Eine solche stellt die algebraische Zahlentheorie bereit: Mit dem komplexen Linearformensatz lässt sich die Diskriminante eines Zahlkörpers (endliche algebraische Erweiterung von $\mathbb{Q}$) abschätzen. Genauer gesagt erzielte Minkowski [94] die Ungleichung

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2}\frac{n!}{n^n}\sqrt{|\Delta_K|} \geq \mathrm{N}(\mathfrak{a})$$

für die Norm eines ganzen Ideals $\mathfrak{a} \neq 0$ im Ganzheistring eines Zahlkörpers K vom Grad n über $\mathbb{Q}$ mit r_2 Paaren komplexer Einbettungen. Als Konsequenz dieser so genannten Minkowski-Schranke ergibt sich ein einfacher Beweis eines Satzes von Hermite, dass es nämlich nur endlich viele Zahlkörper mit vorgegebener Diskriminante gibt.[35] Darüberhinaus zeigt sich, dass es keinen von $\mathbb{Q}$ verschiedenen Zahlkörper mit Diskriminante eins gibt [97]; konsequenterweise existieren, wie von Kronecker zuvor vermutuet, stets verzweigte Primzahlen [95][36]. Schließlich gelang Minkowski in diesem Zuge auch noch ein einfacher Beweis des Dirichletschen Einheitensatzes. Für Details verweisen wir auf Neukirch [111].

Angesichts der weitreichenden Anwendungen seiner geometrischen Methode kommt Minkowski schließlich zu dem Schluß, seine Theorie durch ein Lehrbuch zu manifestieren. Das Schreiben erweist sich jedoch als schwierig und langwierig: Minkowski ringt um die Form der Darstellung. So entnehmen wir etwa seinem Brief an Hilbert vom 23. Februar 1893:[37]

> "Dass ich auch Weihnachten nicht nach Königsberg kam, daran war noch immer mein Buch schuld und die ungemütliche Stimmung, in welche ich dadurch versetzt wurde, dass es so langsam fertig wurde. (...) Jetzt steht es mit dem Buche so weit, dass die Hälfte seit vier Wochen fertig gedruckt ist, und ich das Manuscript der zweiten Hälfte demnächst abgehen lassen will. (...) Überhaupt wollte ich Dich fragen, ob Du vielleicht nicht abgeneigt wärest, das Buch nach

[35] Auch folgt hieraus die Existenz ganzer Idealen mit kleiner Norm in jeder beliebigen Idealklasse und damit die Endlichkeit der Klassenzahl.

[36] Das Analogon für Funktionen gilt ebenso: eine algebraische Funktion besitzt stets Verzweigungspunkte.

[37] [104], S. 50

> seinem Erscheinen in den Göttinger Anzeigen zu besprechen. Solchen Zwang wie z.B. bei Study würdest Du Dir dabei nicht anzulegen brauchen. Hermite übrigens war von den ihm mitgetheilten Resultaten sehr enthusiasmirt und hat mir bereits den dritten entzückten Brief geschrieben."

Wir sehen hier Minkowski als selbstbewussten und weitdenkenden Manager seiner Theorie.[38] Trotzdem erscheint sein Buch [98] erst 1896; der von Minkowski gewählte Titel ist natürlich Geometrie der Zahlen und seine Begründung aus dem Vorwort steht zu Beginn dieses Artikels.

Die Entdeckungen im Zuge seiner Forschungen machen Minkowski zu einem bekannten Zahlentheoretiker; ganz ähnlich ergeht es seinem Freund Hilbert. Hilfreich sind die jährlichen Tagungen der Naturforscher, aber seit der Begründung der Deutschen Mathematiker Vereinigung (DMV) 1890 kommen auch noch deren Jahrestagungen hinzu – die mathematische Welt ist plötzlich besser vernetzt![39]

6. Minkowskis Geometrie im Kontext der Zeit

Geometrie ist eine der mathematischen Disziplinen, welche sich am weitesten in der Geschichte der Menschheit zurück verfolgen lässt.[40] Das Verständnis, was denn unter Geometrie — buchstäblich also der Vermessung der Erde — zu verstehen sei, hat sich gerade im 19. Jahrhundert einem großen Wandel unterzogen. Beginnend mit Thales von Milet im sechsten Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung entwickelt sich die Geometrie zunächst als die zentrale mathematische Disziplin. Der Bezug zur Zahlentheorie ist indirekt. Zahlen werden meist als Längen, Flächen oder Volumina interpretiert, wie beispielsweie in der Proportionenlehre des Eudoxos mit der geometrischen Wechselwegnahme als Vorläufer des euklidischen Algorithmus. Im dritten Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung entwirft Euklid im Rahmen seiner Elemente eine erste axiomatisch aufgebaute Wissenschaft. Diese euklidische Geometrie wird zweitausend Jahre das Bild von Geometrie prägen. In einem für seine Zeit spektakulären Experiment nutzt Eratosthenes etwa zeitgleich geometrische Winkel zur Abschätzung des Erdumfangs. Die Aufgaben des Diophant in seiner 'Arithmetica' sind größtenteils geometrischer Natur.

Im Anschluss an die klassischen Errungenschaften der griechischen Mathematik ist aus Sicht des europäischen Kulturkreises zunächst die analytische Geometrie zu nennen. Diese wurde in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts durch Pierre de Fermat und René Descartes begründet, Vorabeiten in Form von ersten Koordinaten findet man bereits bei Nioclas Oresme und François Viète. Bereits bei Fermat werden Tangenten mit Infinitesimalkalkül gebildet; dies wird durch Isaac Newton fortgesetzt und führt auf eine Klassifikation der kubischen Kurven. Zeitgleich entwickelt Gérard Desargues die Anfänge der projektiven Geometrie auf der

---

[38] Eine interessante Parallele: Fast zeitgleich zu Minkowskis Niederschrift der Geometrie der Zahlen schrieb Hilbert auf Anfrage der DMV an seinem berühmten Zahlbericht zur Darstellung der algebraischen Zahlentheorie inklusive der vielen Erfolge im Zuge der Arbeiten Kroneckers und Dedekinds, zu anfangs übrigens noch gemeinsam mit Minkowski.

[39] Darüberhinaus finden zu dieser Zeit die ersten internationalen Mathematiker Kongresse statt, 1893 ein inoffizieller in Chicago, zu dem Minkowski und auch Hilbert kürzere Artikel verfassen und im zugehörigen Konferenzband [96] veröffentlichen, jedoch ohne selbst nach Amerika zu reisen. 1900 findet in Paris die Weltausstellung und der Internationale Mathematiker Kongress statt, woHilbert seine berühmte Rede hielt, in der er auf Anraten Minkowskis die wesentlichen Probleme seiner Zeit vorstellte, welche schließlich (gelöst oder ungelöst) als die 23 Hilbertschen Probleme in die Geschichte eingingen (siehe [104], S. 119/120) bzw. [64]. Ähnlich der Geometrie der Zahlen erblickte der Eiffelturm Ende 1887 das Licht der Welt.

[40] siehe etwa Scriba & Schreiber [129]

Kunst der Renaissance aufbauend.[41] Diese Entwicklungen werden Anfang des 19. Jahrhunderts wieder aufgegriffen, zunächst durch Gaspard Monge und Jean-Victor Poncelet, später August Möbius und Julius Plücker; die Erstgenannten untersuchten lineare Transformationen, die Letztgenannten führten homogene Koordinaten ein. Daraus entsteht die Invariantentheorie, ein Vorläufer der linearen Algebra, mit Arthur Cayley, James J. Sylvester, Paul Gordan u.a.. Parallel feiert die enumerative Geometrie mit Hermann Hannibal Schubert ihre Hochzeit. Die Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrien durch (in alphabetischer Reihenfolge um jeglichen Prioritätengejammer aus dem Wege zu gehen) János Bolyai, Carl Friedrich Gauß und Nikolai Lobatschewski und letztlich Ferdinand Karl Schweikart liefert ein weiteres großes Thema der Geometrie des 19. Jahrhundert.

In Retrospektive florierten zu Lebzeiten Minkowskis insbesondere Analysis und Geometrie. Erste Anwendungen von Methoden dieser Gebiete finden sich in der Zahlentheorie nieder: Beispielsweise in Eulers analytischem Beweis der Unendlichkeit der Menge der Primzahlen oder noch prominenter in Riemanns Programm zur Klärung zentraler Fragen zur Primzahlverteilung von 1859, aber auch die geometrischen Gedanken von Gauß und Dirichlet im Zusammenhang mit quadratischen Formen (wie oben bereits erläutert).

In diesem Rahmen entwickelt Minkowski seine Ideen. Es ist zu bemerken, dass insbesondere die Entwicklung des passenden Begriffsapparates eine ungemein schwierige Arbeit gewesen sein muss, die ein erhebliches Maß an Kreativität erforderte. Minkowski verschmelzt in seiner Geometrie der Zahlen zwei mathematische Begriffe, welche sich zu seiner Zeit gerade verselbstständigen. Da ist zum einen der Begriff des Gitters, welcher sich bereits in den Gaußschen Untersuchungen zu quadratischen Formen herauskristallisiert und im Laufe des neunzehnten Jahrhunderts zunehmend an Bedeutung gewinnt. Diesem letztlich algebraischen Begriff steht die geometrische Eigenschaft der Konvexität gegenüber. Minkowskis Motivation für diesen Begriff ergab sich aus dem Problem der Bestimmung des ersten (von null verschiedenen) Minimums einer positiv definiten quadratischen Form. Hier offenbart sich auch die Brücke zwischen Arithmetik und Geometrie, welche Minkowski baut: Die Determinante (bzw. Diskriminante) einer quadratischen Form ist eine geometrische Invariante der hierzu äquivalenten Formen. Und beispielsweise im Falle von positiv definiten binären quadratischen Formen ist die Konvexität der zugeordneten Kegelschnitte die wesentliche Eigenschaft, welche die Existenz eines nicht-trivialen Gitterpunktes bei hinreichender Fläche sicherstellt.

Karl Hermann Brunn war wohl der Erste, der den Begriff der Konvexität systematisch studierte. Mit seiner Dissertation [11] und seiner Habilitationsschrift [12] aus den Jahren 1887 und 1889 leistete er Grundlegendes zur heutigen Konvexgeometrie (für einen kurzen Abriss derselben siehe Gruber [52]). Insbesondere die bekannte, oftmals als Ungleichung von Brunn-Minkowski bezeichnete Abschätzung

$$\mathrm{vol}(\lambda\mathcal{C}_1+(1-\lambda)\mathcal{C}_2)^{\frac{1}{3}} \geq \lambda\mathrm{vol}(\mathcal{C}_1)^{\frac{1}{3}}+(1-\lambda)\mathrm{vol}(\mathcal{C}_2)^{\frac{1}{3}}$$

für zwei konvexe Körper $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ des $\mathbb{R}^3$ und beliebiges reelle $\lambda \in [0,1]$ ist hier zu nennen; dabei ist $\lambda\mathcal{C}_1+(1-\lambda)\mathcal{C}_2$ ebenfalls ein konvexer Körper. Gilt für irgendein λ Gleichheit, so gilt bereits $\mathcal{C}_2 = \kappa\mathcal{C}_1 + \mathrm{x}$ für ein positives reelles κ und ein $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3$. Analoga für höhere Dimensionen bestehen ebenso. Die Brunnsche Beweisführung des Gleichheitsfalls wurde von Minkowski, der erst recht spät Brunns Ergebnisse kennen lernte (cf. Kjeldsen [76], S. 59), kritisiert; beide gaben später korrekte Beweise. Minkowski [99] fand mit Hilfe der Brunn-Minkowskischen

[41]Und in Franken nennt man hier noch den seinerzeit in Würzburg und Erlangen ansässigen Lehrer Karl Georg Christian von Staudt als weiteren Schöpfer der projektiven Geometrie.

Ungleichung eine neue Lösung des isoperimetrischen Problems[42] entgegen einer von Brunn geäußerten Erwartung. Eine detaillierte Analyse, wie sich in Minkowskis Studien (weitestgehend zu quadratischen Formen) aus der geometrischen Intuition über die Konstruktion von so genannten Eichkörpern schließlich das Konzept der Konvexität herauskristallisiert, liefert Tinne Hoff Kjeldsen [76].[43] Sie betont, dass Minkowski in seiner Mathematik dem Trend der Zeit nach Abstraktion und Axiomatisierung gerecht wird[44] und ordnet die abstrakten Eichkörper als Objekte jenseits unserer reellen Welt ein. In diesem Sinne ist Minkowski in der Tat einer der ersten Vertreter der modernen Mathematik im Sinne der von Jeremy Gray [50] postulierten mathematischen Revolution zur Jahrhundertwende. Sein Freund David Hilbert mit seinen Grundlagen der Geometrie [63] von 1899 ist ihm ein Verwandter in diesem Geiste.

Der weitere wesentliche Begriff in Minkowskis Geometrie neben der Konvexität ist der des Gitters. Tatsächlich tritt es implizit bereits prominent in Gauß [44] mit seinen essentiellen Eigenschaften in Erscheinung, allerdings benutzt erst Minkowski die vielseitigen Möglichkeiten, die dieser Begriff erlaubt. Strukturmathematisch ist ein Gitter eine diskrete additive Untergruppe eines euklidischen Vektorraums. Diese Definition basiert also auf Konzepten, wie sie gerade zu Minkowskis Zeit ihren Einzug in die Mathematik nahmen. In der Physik, genauer in der Kristallographie beginnend mit Johannes Kepler (auf den wir später noch genauer eingehen werden), treten Gitter schon frühzeitig auf. In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurden zunehmend Methoden der jungen Gruppentheorie verwendet. Beispielsweise gelang Arthur Moritz Schoenflies und Jewgraf Stepanowitsch Fjodorow 1890/91 die Beschreibung sämtlicher 230 kristallographischen Raumgruppen (cf. Burckhardt [13]). Auch treten Gruppen im Zuge der Dedekindschen Idealtheorie und nicht zuletzt (wenngleich etwas später) des Hilbertschen Zahlberichts in dieser Zeit in den Vordergrund zahlentheoretischer Untersuchungen. Insofern ist Minkowski der rasanten Entwicklung in verschiedensten Gebieten aufgeschlossen, adaptiert gewisse Sichtweisen und kombiniert sie in genialer Weise zu einem homogenen Ganzen.

Minkowskis Monographie [98] kommt sehr gut an. Nach dem kurzen Gastspiel in Bonn kehrt Minkowski 1894 an die Königsberger Universität zurück und beerbt seinen früheren Lehrer Adolf Hurwitz. Ein Blick auf die Landkarte (im Anhang) zeigt, wie entfernt Minkowski in Königsberg von seinen bisherigen Kontakten war. 1897 erreicht Minkowski ein Ruf an die Polytechnische Hochschule[45].

Auf dem Internationalen Kongress der Mathematiker 1900 in Paris verlautet Hilbert in seiner berühmten Rede:[46]

---

[42]dass nämlich unter allen geschlossenen Kruven gegebener Länge der Kreis die größte Fläche besitzt. Diese Frage der klassischen griechichschen Mathematik, auch als Didos Problem bekannt, wurde tatsächlich erst durch die Arbeiten von Jakob Steiner und Friedrich Edler im neunzehnten Jahrhundert gelöst. Dank seiner Beliebtheit findet es sich sogar in Leo Tolstois Volkserzählungen; cf. [67], S. 163.

[43]In ihrer umfangreichen und sehr lesenswerten Arbeit diskutiert sie auch Minkowskis Arbeiten zu konvexen Körpern jenseits der Geometrie der Zahlen.

[44]"This phase also shows Minkowski as a mathematician of the new trend of abstraction and axiomatization that became the hallmark of twentieth century mathematics." [76], S. 86

[45]die heutige Eidgenössische Hochschule Zürich (ETH), an welcher Minkowskis Lehrer Hurwitz seit 1894 tätig war; dieser hatte jedoch nicht direkt etwas mit Minkowskis Berufung zu tun (siehe [104], S. 86). Tatsächlich stand eine Zeit lang auch eine Anstellung an der Universität Zürich zur Debatte; Strukturmaßnahmen standen dem jedoch im Wege, wie man bei Frei & Stammbach [40], S. 46, nachlesen kann.

[46][64], S. 259/260

> "Die Anwendung der geometrischen Zeichen als strenges Beweismittel setzt die genaue Kenntnis und völlige Beherrschung der Axiome voraus, die jenen Figuren zugrunde liegen, und damit diese geometrischen Figuren dem allgemeinen Schatze mathematischer Zeichen einverleibt werden dürfen, ist daher eine strenge axiomatische Untersuchung ihres anschauungsmäßigen Inhaltes notwendig. Wie man beim Addieren zweier Zahlen nicht unrichtig untereinandersetzen darf, sondern vielmehr erst die Rechnungsregeln, d.h. die Axiome der Arithmetik, das richtige Operieren mit den Ziffern bestimmen, so wird das Operieren mit den geometrischen Zeichen durch die Axiome der geometrischen Begriffe und deren Verknüpfung bestimmt.
>
> Die Übereinstimmung zwischen geometrischem und arithmetischem Denken zeigt sich auch darin, daß wir bei arithmetischen Forschungen ebensowenig wie bei geometrischen Betrachtungen in jedem Augenblicke die Kette der Denkoperationen bis auf die Axiome hin verfolgen; vielmehr wenden wir, zumal bei der ersten Inangriffnahme eines Problems, in der Arithmetik genau wie in der Geometrie zunächst ein rasches, unbewußtes, nicht definitiv sicheres Kombinieren an, im Vertrauen auf ein gewisses arithmetisches Gefühl für die Wirkungsweise der arithmetischen Zeichen, ohne welches wir in der Arithmetik ebensowenig vorwärts kommen würden, wie in der Geometrie ohne die geometrischen Einbildungskraft. Als Muster einer mit geometrischen Begriffen und Zeichen in strenger Weise operierenden arithmetischen Theorie nenne ich das Werk von MINKOWSKI "Geometrie der Zahlen" (Leipzig 1896)."

Zuvor hatte Hilbert in seiner Abhandlung [62] sogar gewisse Aspekte von Minkowskis Geometrie der Zahlen als ein Beispiel einer Geometrie nennen, in der das Parallelenaxiom ausgelassen wird.[47]

Schließlich wird Minkowski 1902 nach Göttingen berufen, er ist mittlerweile äußerst anerkannt. In Retrospektive äußerte Edmund Hlawka:[48]

> "C. H. Hermite (1822-1901) hat sich über die 1. Lieferung enthusiastisch geäußert. Von R. Fricke (1861-1930) liegt in den Fortschritten der Mathematik eine ausführliche Besprechung vor. Ich möchte aber auch die Überlieferung bemühen. Der Physiker Sommerfeld (1868-1951) sagte einmal zu mir, daß viele Mathematiker nach dem Erscheinen dieses Buches Minkowski über Hilbert (1862-1944) gestellt haben. Er sagte ungefähr, Minkowski habe mehr Ideen gehabt, aber Hilbert wäre fleißiger gewesen. Wenn man die Biographie von Blumenthal (1876-1944) über Hilbert in den gesammelten Werken von Hilbert liest, so findet man ungefähr das gleiche Urteil und das kann nicht ohne Zustimmung von Hilbert erfolgt sein. Heute würde man allerdings dieses Urteil nicht so formulieren."

[47] siehe hierzu die kürzlich von Volkert neu herausgegebene und kommentierte Hilbertsche Festschrift zu den Grundlagen der Geometrie von 1899 [66], S. 49,76. Umgekehrt war der Enthusiasmus am Hilbertschen Programm der Axiomatisierung der Geometrie nicht zu groß. Zassenhaus schrieb "The arithmetization of geometry which Hilbert tried to establish did not overly excite Minkowski as Minkowski's intuitive geometric ideas stirred up Hilbert's desire to get at the truth without geometric intuition." [149], S. 452/453.

[48] [70], S. 406

In den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker Vereinigung veröffentlicht Minkowski anlässlich des einhundertsten Geburtstages von Dirichlet eine wahre Lobeshymne auf dessen mathematisches Werk [102]; dabei offenbart sich einmal mehr, wie geometrische Ideen in Dirichlets Werk Minkowski selbst inspiriert haben: Im Zusammenhang mit einem Fragment in Gauß' Nachlass zur Klassenzahlformel, welche Dirichlet 1837-39 im Zuge seines Beweises für die Existenz unendlich vieler Primzahlen in einer primen Restklasse entwickelte, erläutert Minkowski zunächst, dass Gauß tatsächlich schon diese Klassenzahlformel kannte, jedoch Schwierigkeiten beim Nachweis einer Konvergenz hatte, und schreibt ferner:[49]

> "Daß Dirichlet die fragliche Schwierigkeit überhaupt nicht antrat, liegt daran, daß er von einem gänzlich neuen Ausdruck für den Flächeninhalt einer Figur ausgehen konnte. Die gewöhnliche, ich möchte sagen, mikroskopische Bestimmung eines Flächeninhalts, welche auch Gauß auseinandersetzt, besteht darin, auf die zu untersuchende Figur Quadratnetze mit immer engeren und engeren Maschen zu legen und die in die Figur fallenden Maschen zu zählen. Dirichlet denkt sich ein für allemal ein bestimmtes, unendliches Quadratnetz fest über die Ebene gebreitet. Die zu untersuchende Figur wird nun von einem festen Anfangspunkt aus kontinuierlich in allen Dimensionen gleichmäßig vergrößert, und für jeden Kreuzungspunkt des Netzes wird angemerkt, bei welchem Vergrößerungsverhältnis er gerade auf dem Rand der Figur treten würde. Die Summe der reziproken Werte aller so bestimmten Vergrößerungszahlen für alle vorhandenen Netzpunkte würde noch unendlich sein; man summiere nun aber bestimmte gleich hohe, etwa $2s^{\text{te}}$ Potenzen aller dieser reziproken Werte, so kommt man auf eine durch die ursprüngliche Figur völlig charakterisierte Funktion $\zeta(s)$; diese gestattet eine analytische Fortsetzung für alle komplexen s und weist dann insbesondere für $s = 1$ einen einfachen Pol auf, dessen Cauchysches Residuum genau der Flächeninhalt der Figur wird. Ich möchte vorschlagen, zur leichteren Einbürgerung dieser fundamentalen Überlegung in der Analysis die eben beschriebene Formel den Dirichletschen makroskopischen Ausdruck eines Flächeninhaltes zu nennen."

Diese Sprechweise hat sich jedenfalls bis heute nicht durchgesetzt, allerdings greift der Dirichletsche Beweis der analytischen Klassenzahlformel genau diese Idee wunderbar auf. Zudem finden wir Versatzstücke dieses Gedankens auch in Minkowskis Geometrie der Zahlen wieder, welche wir weiter unten genauer erörtern wollen.[50]

7. Sukzessive Minima

Es lohnt sich, Minkowskis originalen und extrem eleganten Beweis seines Gitterpunktsatzes anzuschauen: Der Einfachheit halber gehen wir vom Gitter $\Lambda = \mathbb{Z}^n$ aus (die Verallgemeinerung auf allgemeine Gitter ist eine schöne Übungsaufgabe). Es sei $\mathcal{C}$ eine abgeschlossene Menge $\mathcal{C} \subset$

---

[49] in [102], S. 456

[50] Dies bemerkt tatsächlich bereits der Zeitgenosse Felix Klein [78], S. 328, ausdrücklich, wenn er schreibt "Es findet sich bei ihm eine innere Verwandtschaft mit Dirichletscher Denkweise." Und kurz danach gesteht er: "Ich selbst habe mich seinerzeit darauf beschränkt, gewisse schon bekannte Grundlagen geometrisch klarzustellen, während Minkowski Neues zu finden unternahm. Diese Untersuchungen zeigen deutlich, daß Geometrie und Zahlentheorie keineswegs einander ausschließen, sofern man sich in der Geometrie nur entschließt, diskontinuierliche Objekte zu betrachten."

$\mathbb{R}^n$, die eine Umgebung des Ursprungs enthalte. Selbiges gilt dann auch für die Menge

$$\lambda\mathcal{C} := \{\lambda \mathrm{x} \,:\, \mathrm{x} \in \mathcal{C}\},$$

wobei λ eine positive reelle Zahl sei. Ist λ sehr klein, so enthält $\lambda\mathcal{C}$ keinen vom Ursprung verschiedenen Gitterpunkt. In jedem Fall ist die Menge $\lambda\mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^n$ endlich. Um nun tatsächlich einen weiteren Gitterpunkt neben dem Ursprung in einer Menge $\lambda\mathcal{C}$ sicherstellen zu können, müssen geometrische Anforderungen an $\mathcal{C}$ selbst gestellt werden. Es ist naheliegend zu fordern, dass keine 'Löcher' vorhanden sind (in denen die Gitterpunkte zu liegen kommen könnten). Hier hilft Konvexität. In diesem Fall enthält $\lambda\mathcal{C}$ für große λ sicherlich einen von 0 verschiedenen Gitterpunkt. Wegen der Monotonie

$$\lambda\mathcal{C} \subset \lambda'\mathcal{C} \qquad \text{für} \quad \lambda < \lambda'$$

existiert ein kleinstes λ_1, so dass $\lambda\mathcal{C}$ einen Gitterpunkt ungleich 0 enthält (und kein $\lambda\mathcal{C}$ für ein $\lambda < \lambda_1$). Nun betrachten wir die Menge der Translate

$$\mathrm{z} + \lambda\mathcal{C} := \{\mathrm{z} + \lambda \mathrm{x} \,:\, \mathrm{x} \in \mathcal{C}\}$$

um Gitterpunkte $\mathrm{z} \in \mathbb{Z}^n$. Ganz ähnlich wie oben zeigt sich, dass für sehr kleine λ diese Translate disjunkt sind, nicht aber für sehr große λ; insbesondere existiert ein minimales $\lambda_0 > 0$, so dass

$$\lambda_0\mathcal{C} \cap (\mathrm{z} + \lambda_0\mathcal{C}) \neq \emptyset \qquad \text{für ein} \quad \mathrm{z} \neq 0.$$

Wollen wir aus diesem Überschneiden einen Gitterpunkt verschieden vom Ursprung gewinnen, so müssen wir eine weitere geometrische Forderung an unsere Ausgangsmenge stellen: Mit der zusätzlichen Vorraussetzung, dass $\mathcal{C}$ symmetrisch ist, folgt für ein Element x beider Mengen, also $\mathrm{x} \in \lambda_0\mathcal{C}$ und $\mathrm{x} - \mathrm{z} \in \lambda_0\mathcal{C}$, dass ebenso $\mathrm{z} - \mathrm{x}$ und $-\mathrm{x}$ in $\lambda_0\mathcal{C}$ enthalten sind. Letzteres zeigt nach Addition von z, dass zudem $\mathrm{z} - \mathrm{x} \in \mathrm{z} + \lambda_0\mathcal{C}$, womit sowohl x als auch $\mathrm{z} - \mathrm{x}$ in sowohl $\lambda_0\mathcal{C}$ und $\mathrm{z} + \lambda_0\mathcal{C}$ liegen. Aufgrund der Konvexität von $\mathcal{C}$ (und selbigem für $\lambda_0\mathcal{C}$ bzw. dessen Translate) liegt dann auch deren Mittelpunkt

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{x} \,+\, \mathrm{z} - \mathrm{x}) = \tfrac{1}{2}\mathrm{z}$$

in $\lambda_0\mathcal{C} \cap (\mathrm{z} + \lambda_0\mathcal{C})$. Wir lesen hieraus $\frac{1}{2}\mathrm{z} \in \lambda_0\mathcal{C}$ bzw. $\mathrm{z} \in \lambda_0\mathcal{C}$ und erhalten $2\lambda_0 \geq \lambda_1$. Tatsächlich besteht hier sogar Gleichheit: Enthält nämlich $\lambda\mathcal{C}$ einen Gitterpunkt $\mathrm{z} \neq 0$, so ist $\frac{1}{2}\mathrm{z} \in \frac{1}{2}\lambda\mathcal{C} \cap (\mathrm{z} + \frac{1}{2}\lambda\mathcal{C})$ und speziell für $\lambda = \lambda_1$ folgt so $\frac{1}{2}\lambda_1 \geq \lambda_0$.

Weil nun die Translate $\mathrm{z} + \lambda_0\mathcal{C}$ für $\mathrm{z} \in \mathbb{Z}^n$ höchstens Randpunkte gemein haben können, muss folglich das Volumen von $\lambda_0\mathcal{C}$ gegenüber dem Volumen zwischen den Gitterpunkten beschränkt sein:

$$\mathrm{vol}(\lambda_0\mathcal{C}) \leq 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{vol}(\lambda_1\mathcal{C}) \leq 2^n.$$

Wenn also kein vom Ursprung verschiedener Gitterpunkt in $\mathcal{C}$ enthalten sein soll, muss $\lambda_1 > 1$ und damit $\mathrm{vol}(\mathcal{C}) < 2^n$ gelten. Damit ist der Minkowskische Gitterpunktsatz ein zweites Mal bewiesen (und diesmal liefert die leichte Verallgemeinerung auf den Fall allgemeiner Gitter einen Zugang, der weitgehend analytische Hilfsmittel vermeidet).

Dieser geometrische Zugang Minkowskis suggeriert unmittelbar weitere Fragestellungen. Mit Hilfe der Geometrie der Zahlen lassen sich Gitterpunkte in hinreichen großen konvexen Körpern finden. Dies lieferte beispielsweise eine obere Schranke für das erste Minimum einer positiv definiten quadratischen Form (s.o.). Es erscheint naheliegend, nach weiteren

Gitterpunkten bzw. Minima zu fragen. Entsprechend definiert man zu einem symmetrischen konvexen Körper $\mathcal{C}$ und einem gegebenen Gitter $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ die sukzessiven Minima als

$$\lambda_j = \inf\{\lambda > 0 \,:\, \dim(\lambda\mathcal{C} \cap \Lambda) \geq j\}$$

für $j = 1, \ldots, n$, so ist λ_j eine untere Schranke für alle positiven λ, so dass $\lambda\mathcal{C}$ mindestens j linear unabhängige Gitterpunkte enthält (womit also λ_1 im Spezialfall der positiv definiten quadratischen Formen mit besagtem Minimum zusammenfällt). Die obige Argumentation zeigt bereits

$$\lambda_1^n \cdot \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{C})}{\det(\Lambda)} \leq 2^n$$

Darüberhinaus gelten aber folgende Ungleichungen:

Minkowskis Satz über sukzessive Minima (1896).

$$\frac{2^n}{n!} \leq \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \cdot \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{C})}{\det(\Lambda)} \leq 2^n.$$

Der Beweis der oberen Schranke ist recht schwierig (und wir verweisen hier etwa auf Cassels [14]). Die Beispiele $\mathcal{C} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, |x_1 + \ldots + x_n| \leq 1\}$ für die untere Schranke und der Würfel $\mathcal{C} = [-1, 1]^n$ für die obere Schranke mit $\Lambda = \mathbb{Z}^n$ zeigen, dass diese Ungleichungen bestmöglich sind. Wichtige Verallgemeinerungen für nicht notwendig symmetrische konvexe Körper bewiesen Claude Ambrose Rogers [119] und (unabhängig) Claude Chabauty [17]. Die spektakulärste Anwendung in der diophantischen Analysis fand Minkowskis Satz über sukzessive Minima wohl in der scharfen Form des Siegelschen Lemmas, welche Enrico Bombieri & Jeffrey Vaaler [8] bewiesen.

Die sukzessiven Minima sind jedoch kein vollständig geklärtes Terrain. Zu einem symmetrischen konvexen Körper $\mathcal{C}$ wird die zugehörige kritische Determinante $\Delta(\mathcal{C})$ als das Infimum aller Gitterdeterminanten $\det(\Lambda)$ zu Gittern Λ erklärt, welche keinen von 0 verschiedenen Gitterpunkt in $\mathcal{C}$ besitzen. Minkowski gelang der Nachweis der Ungleichung

$$\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \cdot \Delta(\mathcal{C}) \leq \det(\Lambda)$$

für den Fall $n = 2$ und n-dimensionaler Ellipsoide; Alan C. Woods [148] zeigte selbiges für $n = 3$, der allgemeine Fall ist aber bis heute offen.

Ein verwandter weiterer Aspekt, den Minkowskis originaler Beweis des Gitterpunktsatzes anregt, betrifft die Frage, wie dicht sich gegebene konvexe Körper im Raum packen lassen. Beispielsweise kann man mit den Translationen $\mathcal{F} + \mathrm{z}$ des Fundamentalbereichs des Gitters um Gitterpunkte den gesamten Raum lückenlos und ohne Überdeckung pflastern. Hieran anknüpfende Untersuchungen werden wir im Rahmen unserer Analyse der Rezeption der Minkowskischen Arbeiten vorstellen.

8. Minkowskis Raum-Zeit

In seinem Vortrag anlässlich des Internationalen Mathematiker Kongresses 1904 in Heidelberg stellt Minkowski [101] sein Gebiet der Geometrie der Zahlen als "introduction des variables continues dans la théorie des nombres" mit Worten von Charles Hermite vor; er präzisiert dies mit "Einige hervorstechende Probleme darin betreffen die Abschätzung der kleinsten Beträge kontinuierlich veränderlicher Ausdrücke für ganzzahlige Werte der Variablen." [101], S. 164. Seinen Gitterpunktsatz bezeichnet er dabei selbstbewusst als "das Fundamentaltheorem der Geometrie der Zahlen (...) weil es fast in jede Untersuchung auf diesem Gebiete hineinspielt." [101], S. 164. In seinem Vortrag und dem zugehörigen Artikel stellt Minkowski das gesamte Spektrum von Anwendungen seiner Geometrie der Zahlen in eindrucksvoller Weise dar. So stellt er heraus, dass dieser geometrische Ansatz "zu einfachen Beweisen der Dirichletschen Sätze über die Einheiten in den algebraischen Zahlkörpern"[51] führt, und tatsächlich findet sich in der modernen Literatur zur algebraischen Zahlentheorie nahezu ausnahmslos der Minkowskische Beweis des Dirichletschen Einheitensatzes[52]. Ferner spricht Minkowski auch mehrdimensionale Kettenbrüche an[53] und liefert hierfür eine geometrische Herangehensweise. Und seine Fragezeichen-Funktion $?(x)$ mit ihren seltsamen analytischen Eigenschaften wird erwähnt; sie ist bis heute Gegenstand tiefsinniger Untersuchungen im Kontext der Arithmetik von Kettenbrüchen. Resümierend kann man sagen, dass Minkowskis Geometrie der Zahlen in kürzester Zeit ein weitreichendes Spektrum an Anwendungen gefunden hat.

Drei Jahre später verfasst Minkowski mit seinem Lehrbuch Diophantische Approximationen [103] eine leichter lesbare Einführung in das von ihm durch seine Geometrie der Zahlen bereicherte Gebiet; bis zu Jurjen Koksmas Lehrbuch gleichen Namens [79] aus dem Jahr 1936 fällt ihm die Rolle der Standardreferenz zu diophantischen Fragestellungen zu. Innovativ in Minkowskis Lehrbuch ist auch die zentrale Rolle, welche er der Arithmetik von Zahlkörpern zuweist, ein Thema, welches zu dieser Zeit besonders aktuell war (nicht zuletzt dank des Zahlberichts seines Freundes Hilbert).

Grob betrachtet mag man Minkowskis Schaffen in drei Phasen einteilen: die zahlentheoretische Frühphase zu quadratischen Formen, die Schaffenszeit der 1890er beginnend mit der Berufung nach Bonn und dem Verfassen der Geometrie der Zahlen, und schließlich seine Physikphase ab 1900. Tatsächlich ist die Physik dieser Epoche durchdrungen von Geometrie.[54] Sein zunehmendes Interesse an physikalischen Fragestellungen fand 1907 einen Höhepunkt, als Minkowski realisierte, wie sich die Theorien von Lorentz und Einstein mathematisch in einem nicht-euklidischen Raum erklären lassen. Nach Einstein sind Messwerte für Zeit und Raum relativ zum Beobachtenden, Minkowski erkannte, dass eine bestimmte Kombination derselben unabhängig vom Beobachtenden ist. Die Konsequenz ist sein Raum-Zeit-Kontinuum, welches später Einstein bei der Entwicklung dessen allgemeiner Relativitätstheorie hilfreich war. Auch hier finden sich quadratische Formen (in Gestalt der so genannten Minkowski-Metrik) und

---

[51][101], S. 168

[52]der da besagt, dass die Einheitengruppe des Ganzheitsringes eines Zahlkörpers mit R_1 reellen und r_2 Paaren komplex konjugierter Einbettungen in $\mathbb{C}$ eine abelsche Gruppe vom Rang $r_1 + r_2 - 1$ ist. Im Falle reell-quadratischer Erweiterungen $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ von $\mathbb{Q}$ liefert die Minimallösung der Pellschen Gleichung $X^2 - dY^2 = 1$ ein erzeugendes Element.

[53]wofür wir auf Erdős et al. [36] verweisen; hierzu sei angemerkt, dass etwa zeitgleich Klein [77] geometrisch verwandte Studien durchführte.

[54]In diesem Kontext ein weiteres Zitat von Born: "Der größte Teil von Minkowskis Arbeiten liegt auf dem Felde der Zahlentheorie, und davon zu berichten, bin ich nicht befugt. Ich habe nur in einem seiner arithmetischen Werke gelesen, das den Titel 'Diophantische Approximationen' trägt und aus seinen Vorlesungen im Winter 1903/04 hervorgegangen war, gerade ehe ich nach Göttingen kam. Darin werden wie in Minkowskis größerem Werk 'Geometrie der Zahlen' arithmetische Sätze aus geometrischen Betrachtungen gewonnen, und zwar hier insbesondere mit Hilfe des Netzes von Punkten mit ganzzahligen Koordinaten in der Ebene. Diese Einführung in das Zahlengitter war mir später bei der dynamischen Theorie der Kristallgitter von gewissem Nutzen." [10], S. 41. Tatsächlich veröffentlich Born [9] (gewidmet seinem Freunde David Hilbert) 1915 seine vielbeachtete Monographie Dynamik der Kristallgitter, welche zusammen mit seinem Artikel zur Atomtheorie des festen Zustandes von 1923, die Gitterdynamik in einheitlicher Form darstellt, was heutzutage als ein wichtiger Schritt zur Begründung der Festkörperphysik angesehen wird. Den Physik-Nobelpreis erhielt Born 1954 jedoch für seine Arbeiten zur statistischen Deutung der Quantenmechanik.

geometrische Gedanken (die Verbindung von Raum und Zeit zu einer Raumzeit). Max Born würdigt die Beiträge der Beteiligten wie folgt:[55]

> "Im ganzen kann man sagen, daß die spezielle Relativitätstheorie nicht das Werk eines Mannes, sondern durch Zusammenwirken einer Gruppe großer Forscher, LORENTZ, POINCARE, EINSTEIN, MINKOWSKI, entstanden ist. Daß gewöhnlich EINSTEINs Name allein genannt wird, hat gleichwohl eine gewisse Berechtigung, weil ja die spezielle Theorie nur der erste Schritt war zu der allgemeinen, welche die Gravitation mit umfaßte und dadurch das gesamte Werk NEWTONs revolutionierte. Die allgemeine Relativitätstheorie aber ist EINSTEINs ausschließliche Leistung. Sie beruht auf der Verbindung der Minkowskischen Weltgeometrie und den tiefen Gedanken über gekrümmte Räume, die lange vorher von BERNHARD RIEMANN entwickelt und von CHRISTOFFEL, RICCI und LEVI-CIVITÁ weiter geführt worden waren. Auch die allgemeine Relativitätstheorie ist somit ohne Minkowskis Arbeit undenkbar, und darum ist es nicht ohne Reiz zu fragen, was EINSTEIN von MINKOWSKI gehalten hat. In der ersten Zeit, um 1909, da ich EINSTEIN kennenlernte, war er ziemlich ablehnend und sah in MINKOWSKIs Arbeit nicht viel mehr als überflüssiges mathematisches Beiwerk. Aber das änderte sich schnell, als er tiefer in das Problem der allgemeinen Relativität eindrang, wo gerade MINKOWSKIs mathemathische Methoden wesentlich wurden."

Interessant ist, dass Einstein Minkowski aus dessen Züricher Zeit sehr wohl bekannt war; hierzu schreibt Born über Minkowski:[56]

> "Unter seinen Schülern war einer, dessen Name kurze Zeit später mit dem seinen viel genannt werden sollte, als die spezielle Relativitättstheorie die Gemüter bewegte, ALBERT EINSTEIN. Aber er ist Minkowski keineswegs besonders aufgefallen. Als ich später, 1909, Minkowskis Mitarbeiter an Problemen der Relativitätstheorie geworden war, hat er mir einmal gesagt: "Ach, der Einstein, der schwänzte immer die Vorlesungen – dem hätte ich das gar nicht zugetraut.""

Minkowskis Raum erstreckt sich mit seinen Wirkungsstätten Königsberg, Bonn, Zürich und Göttingen über weite Teile Europas und seine Leistungen in Mathematik und Physik waren bahnbrechend; seine Zeit hingegen war kurz: Hermann Minkowski verstirbt völlig unerwartet an einem Blinddarmdurchbruch am 12. Januar 1909 in Göttingen.

9. Voronoï und Blichfeldt

Minkowskis Geometrie der Zahlen lieferte in relativ kurzer Zeit eine Vielzahl von neuen Resultaten. Es fällt auf, dass die nennenswerten hierunter während der Lebenszeit Minkowskis im Wesentlichen von ihm selbst stammen. Insofern mag man sich fragen, ob dies einzig auf seine Genialität und Vertrautheit mit der neuen geometrischen Herangehensweise zurückzuführen ist, oder seine Theorie zunächst nicht ordentlich rezipiert wurde.

> "Die Puristen unter den Zahlentheoretikern, haben die Geometrie der Zahlen als der Analysis angehörig gefunden und sich bemüht, dieses Werkzeug möglichst zu eliminieren. So wurden für den Minkowski'schen Linearformensatz verschiedene, elementare Beweise gegeben. Am bekanntesten ist der Beweis von

[55] [10], S. 504

[56] [10], S. 502

> A. Hurwitz (1859-1919), der ihn zunächst für ganzzahlige Koeffizienten mit Hilfe des Schubfachprinzipes beweist. Daraus folgt unmittelbar der Fall der rationalen Koeffizienten und durch Grenzübergang kann der allgemeine Fall erledigt werden."

schrieb Edmund Hlawka [70], S. 406, selbst ein Forscher auf dem Gebiet der Geometrie der Zahlen. Explizit angesprochen wird hier der elementare Beweis [72], den Adolf Hurwitz, einer der prägendsten Lehrer Minkowskis, aber auch dessen Freund und Kollege während seiner Züricher Zeit, für dessen Linearformensatzes geliefert hatte. Natürlich beleben verschiedene Ansätze und Beweise die Materie. Auch kann man den vielseitigen Hurwitz kaum als Puristen bezeichnen, der nicht aufgeschlossen für neue Methoden und Entwicklungen wäre. Nicht zuletzt ist es aber die geometrische Intuition, welche die Minkowskische Geometrie der Zahlen so elegant erscheinen lässt und nebenbei derart tiefe arithmetische Resultate erlaubt. Tatsächlich ist diese neue Denkweise nicht nur Minkowski eigen.

Georgy Voronoï hatte vieles mit Minkowski gemein (nicht nur sein Aussehen). Seine Lebensspanne deckt sich ziemlich mit der Minkowskis. Voronoï wurde am 28. April 1868 in Zhuravka (damals Russland, heute Ukraine) geboren und verstarb jung und unerwartet am 20. November 1908 in Warschau an entzündeten Gallensteinen. Die beiden trafen sich ein einziges Mal und zwar auf dem Internationalen Mathematiker Kongress 1904 in Heidelberg, wo Voronoï zum Kreisproblem vortrug [144], während Minkowski seine Geometrie der Zahlen vorstellte [101]. Und Voronoï gilt als Mitbegründer der Geometrie der Zahlen.[57]

Bereits 1895 bestand ein Kontakt zwischen den beiden; so berichtet Minkowski in einem Brief vom 4. Dezember an seinen Freund Hilbert [104], S. 72, von einem

> "Woronoj (Petersb.) [der] auf 188 Seiten eine Theorie der kubischen Körper entwickelt, von der ich nach dem mangelhaften Referat in den Fortschritten jedenfalls nicht behaupten kann, daß sie die Hauptsachen außer Acht ließe. Du wirst in Göttingen vielleicht in der glücklichen Lage sein, einen das Russische verstehenden Mathematiker zur Verfügung zu haben; dann versäume es nicht, Dich über jene Arbeiten zu informiren; sie könnte doch mehr Gutes enthalten, als unsereiner von Russen erwartet."

Wir erinnern, dass Minkowskis Familie aufgrund von Antisemitismus aus dem russischen Aleksotas bzw. Kaunas ins preussische Königsberg umsiedelte. Angesichts dessen zeugt dieses Zitat von einer verhältnismäßig zurückhaltenden Sicht, die keineswegs selbstverständlich um die Jahrhundertwende war. Wie sich einem weiteren Brief vom 17. November 1896 entnehmen lässt, ergab sich im Weiteren sogar eine private Korrespondenz, die allerdings nicht erhalten geblieben ist.

Zu Beginn seiner Karriere beschäftigte sich Voronoï mit Kettenbrüchen und deren Verwendung zur Konstruktion von Einheiten in Ganzheitsringen zu kubischen Zählkörpern; seine Doktorarbeit [142] erscheint 1896 nahezu zeitgleich mit Minkowskis verwandten Überlegungen [97] zu einer geometrischen Verallgemeinerung von Kettenbrüchen durch lokale Minima. Später setzte Voronoï sich zunehmend mit analytischen Themen zu divergenten Reihen und Mittelwerten zahlentheoretischer Funktionen auseinander.

[57] Je nach geographischem und kulturellem Hintergrund wird die Geometrie der Zahlen dem einen oder anderen zugeschrieben. Vielleicht ist die Geometrie der Zahlen ein weiteres Beispiel für das Phänomen zeitgleicher unabhängiger Erkenntnisse wie etwa der Beweis des Primzahlsatzes.

Voronoïs vielleicht wichtigster Beitrag zur Mathematik sind jedoch seine geometrischen Überlegungen im Zusammenhang seiner Studien [145] zu quadratischen Formen. In der euklidischen Ebene sei eine Menge $\mathcal{M}$ von Punkten gegeben; dann heißt die Menge all der Punkte, welche von einem Punkt $P \in \mathcal{M}$ eine kürzere Distanz entfernt ist als von allen weiteren Punkten von $\mathcal{M}$, die Voronoï-Zelle von P. Im Falle einer diskreten Menge $\mathcal{M}$ sind diese Zellen konvexe Polygone, welche überschneidungsfrei den Raum pflastern. Dieses Konzept lässt sich leicht verallgemeinern (etwa auf andere Räume und andere Distanzmaße) und besitzt vielerlei Anwendungen, beispielsweise in der Meteorologie und Kristallographie[58], wo man auch gerne von Thiessen-Polygone sowie Wigner-Seitz-Zellen nach Alfred H. Thiessen (1911) bzw. Eugene Paul Wigner und Frederick Seitz (1933) spricht; tatsächlich findet sich diese Idee bereits in einer Arbeit von Dirichlet [31] und noch früher in den Le Monde, ou Traite de la lumiere [25], von René Descartes in der Zeit um 1630 verfasst. Diese wichtige Serie von Arbeiten zu quadratischen Formen verfasste Voronoï im Exil (ähnlich der Minkowskischen Isolation als mathematischer Pinguin in Bonn). Im Zuge der russischen Revolution 1905 und ihrer geographischen und zeitlichen Ausläufer musste Voronoï wie auch seine Kollegen bis ins Jahr 1908 (kurz vor seinem Tod) die geschlossene Universität in Warschau, wo er seit 1894 tätig war, verlassen und lebte in dieser Zeit im fernen Novocherkassk in Russland. Dies erinnert an Newtons fruchtbaren Rückzug aus Cambridge angesichts der wütenden Pest 1665 und seine bahnbrechenden Gedanken in ländlicher Abgeschiedenheit. Mehr Informationen über Voronoïs kurzes Leben liefert Syta [137].

Einer der frühen Rezipienten und weiteren Ausgestalter der Minkowskischen Geometrie der Zahlen ist Hans Frederik Blichfeldt (1873-1945). Den gebürtigen Dänen verschlug es als Fünfzehnjährigen in die U.S.A., wo er zunächst mit harter Arbeit seinen Lebensunterhalt und das spätere Studium finanzierte.[59] Blichfeldts amerikanischer Traum wurde wahr — er studierte erfolgreich in Stanford, erhielt dort eine Anstellung und promovierte dann 1898 bei Sophus Lie in Leipzig; später wurde er Professor in Stanford. Seine Dissertation und auch seine frühen Arbeiten beschäftigen sich mit linearen Gruppen und deren Darstellungen, erst 1914 mit dem Artikel [4] wendet er sich der Minkowskischen Ideenwelt zu und beweist den

Satz von Blichfeldt (1914). Sei Λ ein Gitter mit Determinate $\det(\Lambda)$ und Ω eine Punktemenge von einem Volumen $\mathrm{vol}(\Omega) > m\det(\Lambda)$ für eine natürliche Zahl m. Dann existieren $m+1$ verschiedene Punkte $\mathrm{x}_0, \ldots, \mathrm{x}_m$ in Ω, so dass die Differenzen $\mathrm{x}_j - \mathrm{x}_i$ allesamt in Λ liegen.

Bemerkenswert ist hier die Loslösung von symmetrischen konvexen Mengen.[60] Nennen wir eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ packbar, wenn $(\mathrm{x}+\Omega) \cap (\mathrm{y}+\Omega) = \emptyset$ für verschiedene $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{Z}^n$ gilt. Dann besagt der Blichfeldtsche Satz somit: Ist Ω Lebesgue-meßbar und packbar, dann gilt $\mathrm{vol}(\Omega) \leq 1$. Dies liefert sofort einen alternativen Beweis des Minkowskischen Gitterpunktsatzes und sein Ansatz erlaubt darüberhinaus noch weitere Anwendungen und Verallgemeinerungen. Einen interessanten alternativen Beweis des Blichfeldtschen Satzes mit Hilfe des Schubfachprinzips fand Willy Scherrer [125].[61]

---

58 Tatsächlich bemerkte bereits Seeber [130] 1831, dass positiv definite quadratische Formen nützlich für die Kristallographie sind.

59 "I worked with my hands doing everything, East and West the country across." (cf. [28], S. 882)

60 Ehrhart [33, 34] entfernte für die Ebene die Symmetriebedingung durch Annahme des Schwerpunktes im Ursprung; im Allgemeinen ist die Frage jedoch offen.

61 Auch findet sich hier die Approximationsidee aus Mordells Beweis des Gitterpunktsatzes wieder.

Eine weitere wesentliche Vereinfachung lieferte Robert Remak [117]. Der Berliner Remak promovierte 1911 bei Frobenius zu gruppentheoretischen Fragestellungen; seiner Habilitation wurde ihm jedoch unmöglich gemacht. Zwar hatte er bei seinem ersten Versuch 1919 u.a. den Frobenius' Nachfolger und Minkowski-Schüler Constantin Carathéodory auf seiner Seite, aber seine schwierige Persönlichkeit und offene Kritik am Lehrbetrieb standen seinen mathematischen Leistungen im Weg. Darüberhinaus passten seine politischen Ansichten links der Mitte und auch seine Versuche, ökonomische und soziale Theorien wissenschaftlicher zu fassen, nicht in das etablierte System der Berliner Universität. Ein weiterer Versuch der Habilitation scheiterte 1923. Anschließend verbrachte Remak viel Zeit in Göttingen, gefördert von Edmund Landau und Issai Schur, angeregt von Emmy Noether und – erstaunlicherweise auch von dem Antisemiten Ludwig Bieberbach. In dieser Zeit forschte Remak zu Themen der Geometrie der Zahlen, fand Verallgemeinerungen der Minkowskischen Sätze und etablierte sich damit schließlich derart, dass eine Habilitation in Berlin 1929 nicht mehr abgewiesen werden konnte. Während der Nazizeit wurde Remak als Jude verfolgt und in Auschwitz ermordet.[62]

[100] hatte sich auch mit einer inhomogenen Version seines Linearformensatzes auseinandergesetzt und im Falle des Produktes von $n = 2$ solcher Linearformen eine bestmögliche Abschätzung einer minimalen nicht-trivialen Lösung erzielt und eine Vermutung für allgemeines n aufgestellt. Remak [118] gelang mit erheblichem Aufwand unter Verwendung einer neuen Methode der Beweis einer solchen Abschätzung für den Fall $n = 3$. Später lieferten Freeman Dyson [32] (auf Anregung von Davenport, von dem sogleich die Rede sein wird) und Curtis McMullen [91] Beweise für $n \leq 6$; weitere Fälle wurden erfolgreich behandelt, worauf wir hier aber nicht weiter eingehen wollen.

10. Die Schulen in Manchester und Wien

Die nachfolgende zahlentheoretische Community der 1920er Jahre begegnete der Geometrie der Zahlen mit einer gewissen Zurückhaltung, wie es ein weiteres Zitat von Hlawka belegt:[63]

> "Viele prominente Zahlentheoretiker (so z.B. H. Hasse (1898 geb.) waren der Ansicht, daß die Geometrie der Zahlen doch ein schwaches Werkzeug für die Zahlentheorie ist (...)"

Erst eine weitere Generation von damals jungen und heute namhaften Vertretern der Zahlentheorie führte zu einer angemessenen Rezeption. Hlawka spricht von der Manchester Schule um Mordell und der Wiener Schule.

Behandeln wir zunächst die englische Schule. Sie wurde begründet durch Louis Joel Mordell (1888-1972), Sohn jüdischer Einwanderer aus Litauen (also eine gewisse geographische Verwandtschaft zu Minkowski); seit 1920 war er in Manchester tätig und baute dort eine bemerkenswerte Arbeitsgruppe auf.[64] Im Rahmen der Geometrie der Zahlen, welche Mordell in den 1930ern zunehmend beschäftigte, besteht sein Verdienst u.a. darin, erstmalig nicht-konvexe Probleme behandelt zu haben [106]. Der Austausch innerhalb der Manchester-Gruppe war sehr fruchtbar. Beispielsweise erzielte Mordells Schüler Harold Davenport (wenngleich

[62]Mehr Details zu Remaks Leben und Werk liefert Merzbach [92]. Beispielsweise lernt man dort, dass Remaks Großvater, ein bedeutender Mediziner gleichen Namens, als einer der Ersten seines Faches die außerordentliche Erlaubnis erhielt, sich als Jude sich an der Berliner Universität habilitieren zu dürfen, wurde aber trotz seiner Erfolge in Physiologie und Embryologie diskriminiert und blieb zeitlebens ohne eine ordentliche Professur.

[63][70], S. 404

[64]Mordell schreibt "I was self-taught mathematicially" (cf. [15], S. 70) und tatsächlich sagt man seinen Artikeln und Büchern einen eigentümlichen Stil nach.

dieser bei John E. Littlewood promovierte) die exakten Minima für das Produkt dreier ternärer Linearformen [23] und Mordell stellte dessen komplizierten Beweis einen eleganten Zugang zur Seite [107]. Kurze Zeit später entdeckte Mordell [108] folgende schöne Abhängigkeit für aufeinanderfolgende Hermite-Konstanten:

$$\gamma_n \leq \gamma_{n-1}^{(n-1)(n-2)}.$$

Mordells Arbeitsgruppe wurde bereits in den frühen 1930ern Anlaufstelle für etliche aus Nazideutschland emigrierte Mathematiker, wie etwa Kurt Mahler, ein Schüler Carl Ludwig Siegels jüdischer Herkunft. Mahler initiierte u.a. die Behandlung von Sterngebieten[65] mit Methoden der Geometrie der Zahlen. Sein Kompaktheitssatz [89] ist von konzeptioneller Bedeutung und ein wichtiges Werkzeug in Gregori Aleksandrovich Margulis' Beweis [90], dass jede nicht-degenerierte quadratische Form Q in $n \geq 3$ Veränderlichen, welche nicht ein Vielfaches einer rationalen Form ist, ein dichtes Bild $Q(\mathbb{Z}^n)$ in $\mathbb{R}$ besitzt. Dies verifiziert eine alte Vermutung von Alexander Oppenheim [113] bzw. einer verschärften Formulierung von Davenport.

Es sind weitere Charaktere an dieser Stelle zu nennen. Zum einen Claude Ambrose Rogers, welcher bereits während seiner Promotion mit etlichen Veröffentlichungen zur Geometrie der Zahlen auffiel und in dieser Zeit viel mit Davenport kooperierte. Zum anderen Johannes van der Corput [21], der nicht direkt der Manchester Schule zugeordnet werden kann, sich dafür aber als Doktorvater von Jurjen Koksma auszeichnete. Gemeinsam mit Davenport [22] gelang eine Verallgemeinerung des Minkowskischen Gitterpunktsatzes in der Ebene, indem die Krümmung der Randkurve Berücksichtigung findet. Ferner entwickelte van der Corput eine Methode Mordells [105] (welche auch den Beweis des Minkowskischen Gitterpunktsatzes aus §3 liefert) fort, welche u.a. eine untere Abschätzung für die Anzahl der Gitterpunkte in einem symmetrischen konvexen Körper in Abhängigkeit von dessen Volumen erlaubt. Eine verwandte Verallgemeinerung von Siegel [131] mittels Fourier-Analysis brachte nicht nur neue analytische Werkzeuge ins Spiel, sondern lieferte sogar eine explizite (gewichtete) Gleichung.

Die Wiener Schule wurde von Philipp Furtwängler[66] gegründet und später von Nikolaus Hofreiter und nicht zuletzt Edmund Hlawka fortgeführt. Furtwängler veröffentlichte recht wenig zur Geometrie der Zahlen, gab allerdings viele Anstöße, insbesondere für die Forschung seines Schülers Hofreiter, welcher sich intensiv mit Produkten von inhomogenen Linearformen, quadratischen Zahlkörpern ohne euklidischen Algorithmus und Fragen der diophantischen Approximation auseinandersetzte [71]. In der Regel sind die Ganzheitsringe von Zahlkörpern nicht-euklidisch, womit zunächst kein euklidischer Algorithmus zur Verfügung steht mit Hilfe dessen ein praktikabler Kettenbruchalgorithmus implementiert werden könnte. Hier liefert der Minkowskische Linearformensatz einen alternativen Zugang.[67] Die relevanten Beiträge der Wiener Schule zur Geometrie der Zahlen sind aber Edmund Hlawka zuzuschreiben. In seiner Promotion über die Approximationen von zwei komplexen inhomogenen Linearformen [68]

[65] die sich dadurch auszeichnen, dass sie einen ausgezeichneten Punkt enthalten, so dass jede geradlinige Verbindungsstrecke zu einem weiteren Punkt komplett innerhalb dieser Menge liegt

[66] der an demselben Gymnasium Andreanum in Hidlesheim wie Adolf Hurwitz zur Schule ging

[67] Ein typisches Beispiel findet sich in der Dissertation von Hilde Gintner [48] aus dem Jahr 1936: Zu $m \in \mathbb{N}$ und beliebigem $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}(i\sqrt{m})$ existieren unendlich viele $p, q \in \mathbb{Z}[i\sqrt{m}]$ mit $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{\sqrt{6m}}{\pi} \frac{1}{|q|^2}$. Im Falle $m \not\equiv 3 \bmod 4$ ist $\mathbb{Z}[i\sqrt{m}]$ der Ganzheitsring des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(i\sqrt{m})$; andernfalls liefert eine Beweisvariante eine analoge Ungleichung für den entsprechenden Ganzheitsring als rechte Seite sogar $\frac{\sqrt{6m}}{2\pi} \frac{1}{|q|^2}$.

bei Hofreiter führte er dessen Steckenpferd fort; im Rahmen seiner Habilitation gelang ihm dann ein großer Wurf, für dessen Erklärung wir allerdings etwas ausholen müssen.

Für eine kompakte Menge $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ ist die zugehörige Gitterkonstante definiert als

$$\Delta(\mathcal{C}) = \min\{\det(\Lambda) \, : \, \Lambda \cap \mathcal{C} \neq \{0\}\},$$

wobei das Minimum über alle Gitter des $\mathbb{R}^n$ erhoben wird (und stets existiert wie Mahler zeigte). Dann ist

$$2^{-n} \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{C})}{\Delta(\mathcal{C})}$$

gleich dem Maximum der Gitterpackungsdichte, also dem Anteil des $\mathbb{R}^n$, welcher durch $\mathcal{C} + \Lambda$ ohne Überlappung überdeckt wird. Im speziellen Fall von Kugeln notieren wir diese Dichte als δ_n. Den Zusammenhang zur Hermite-Konstanten γ_n hatte bereits Gauß [44] mit der Formel

$$\delta_n = \frac{1}{\Gamma(1+\frac{n}{2})} \left(\frac{\pi\gamma_n}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$$

festgestellt. Eine untere Abschätzung für diese wichtige Größe und damit auch für die Hermite-Konstante liefert der

Satz von Hlawka-Minkowski (1911, 1943). Für einen Sternkörper $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\Delta(\mathcal{S}) \leq \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{S})}{2\zeta(n)}.$$

Hierbei ist $\zeta(n) = 1 + 2^{-n} + 3^{-n} + \ldots$ der Wert der Riemannschen Zetafunktion $\zeta(s)$ an der Stelle $s = n$. Dieses Resultat findet sich ohne Beweis in den gesammelten Abhandlungen von Minkowski (posthum publiziert 1911); den ersten Beweis lieferte Hlawka [69] in seiner Habilitationsschrift 1943. Kurze Zeit später veröffentliche Siegel [132] einen weiteren, vielleicht noch zugänglicheren Beweis. Hlawka betreute Zeit seines langen Lebens 130 Promotionen und etliche seiner Schüler haben Professuren inne, etliche von ihnen mit einem Forschungsgebiet nahe der Geometrie der Zahlen. "Die stürmische Entwicklung dieses Gebietes in den 40- und 50-ziger Jahren endet ungefähr um 1960. Das Lehrbuch von Lekkerkerker: 'Geometry of Numbers' (1969) stellt das Erzielte zusammen. Die Entwicklung ging aber in stilleren Bahnen weiter." schreibt Hlawka [70], S. 9. Die bahnbrechende Arbeit [126] des Hlawka-Schülers Wolfgang Schmidt fällt in die Schlussphase der stürmischen Entwicklung. Der Schmidtsche Teilraum-Satz[68] besagt, dass zu gegebenen linear unabhängigen Linearformen $Y_1, \ldots, Y_n$ in n Unbekannten $X_1, \ldots, X_n$ mit algebraischen Koeffizienten sowie einem beliebigen $\epsilon > 0$ ganze Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ gibt, nicht alle null, so dass

$$|Y_1(\mathrm{x}) \cdot \ldots \cdot Y_n(\mathrm{x})| < |\mathrm{x}|^{-\epsilon} \qquad \text{mit} \quad \mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

in endlich vielen echten Unterräumen des $\mathbb{Q}^n$ liegen.

[68]in der mittlerweile englischsprachigen Literatur 'subspace theorem'

11. Packungsprobleme

Nicht unerwähnt bleiben dürfen die so genannten Packungsprobleme. Hierbei geht es weniger um Fragen der Optimierung wie sie Paketzustelldienste oder moderne Bücherverkaufskonzerne zu lösen haben, als um eine naheliegende Frage, die sich bereits zu Beginn dieses Artikels angesichts des Zusammenhangs von Dreieckszahlen und Kugelpyramiden oder aber beim Besuch eines Wochenmarktes stellen mag: Wie lassen sich möglichst viele Orangen auf engem Raum stapeln?

Diese Fragestellung ist tatsächlich recht alt. Der englische Astronom Thomas Harriot war nicht nur 1609 der Erste (vor Galilei!), der sein Fernrohr gen Himmel neigte und dort u.a. die Jupitermonde entdeckte, was er jedoch mitzuteilen unterließ, sondern er machte sich auch Gedanken über das raumsparendste Stapeln von Kanonenkugeln (auf Anregung des auf den Weltmeeren herumsegelnden Sir Walter Rayleigh).[69] Harriot äußerte die Vermutung, dass ein Stapeln derselben, wie man es von etwa Orangen auf einem Wochenmarkt kennt, optimal seien. Er war hierbei sicherlich nicht der Erste, denn die Orangenstapel entstehen ja nicht von ungefähr. Ferner gab seine Korrespondenz mit dem noch bekannteren Astronomen und Mathematiker Johannes Kepler Anlass zu dessen Äußerung, dass die dichteste Kugelpackung im dreidimensionalen euklidischen Raum durch eine kubisch-flächenzentrierte Packung bzw. die hexagonale Packung gegeben ist. Bemerkenswert ist hier die Loslösung von einem endlichen zu einem unendlichen Orangenstapel. Diese so genannte Keplersche Vermutung findet sich in dessen Arbeit vom sechseckigen Schnee [75] von 1610. Aus den romantischen Eingangsworten Keplers mit der Widmung für seinen Freund Johannes Wackher von Wackersfeld mag man den Zusammenhang mit der Kugelpackung heraus erahnen:[70]

> "Als ich so nachdenklich und sorgenvoll über die Brücke ging und mich über meine eigene Armseligkeit ärgerte, nämlich zu dir ohne Neujahrsgeschenk zu kommen, und immer denselben Gedanken nachging, dieses Nichts anzugeben oder etwas zu finden, was ihm am nächsten kommt, und ich daran die Schärfe meines Denkens übte, da fügte es der Zufall, dass sich der Wasserdampf durch die Kälte zu Schnee verdichtete und vereinzelte kleine Flocken auf meinen Rock fielen, alle waren sechseckig mit gefiederten Strahlen. [404] Ei, das ist ein erwünschtes Neujahrsgeschenk für einen Freund des Nichts! So wie der Schnee da vom Himmel herabkommt und den Sternen ähnlich ist, ist er auch passend als Geschenk eines Mathematikers, der nichts hat und nichts erhält."

Obwohl zu Keplers Zeiten die atomare bzw. molekulare Struktur unbekannt ist, bemerkt dieser eine hexagonale Anordnung (welche die Wassermoleküle bilden). Diesen Gedanken wird Auguste Bravais 1849 mit der Idee seiner Kristallgitter theoretisch genauer fassen und Max von der Laue wird diese 1912 experimentell nachweisen.[71] Diese augenscheinliche Struktur der Schneeflocken erinnerte Kepler an seine Konversation mit Harriot und führte ihn zu seiner Vermutung zur raumsparenden Lagerung unendlich vieler Kugeln gleicher Größe.

[69] Wesentlich älter sind Untersuchungen von ArybhatIya und Bhaskhara aus dem fünften bzw. sechsten Jahrhundert in Sanskrittexten; cf. Hales [55], S. 2.

[70] siehe auch http://www.mathematik.de/ger/information/kalenderblatt/keplers_strena/keplers_strena.html

[71] Der Nachweis der Atomstruktur schloss sich an die 1905 von Einstein untersuchten Brownschen Bewegung an, welche auch in der Mathematik eine wichtige Rolle in der Theorie der stochastischen Prozesse spielt. Die Idee der unteilbaren Materie findet sich bereits bei Demokrit, und die Primzahlen sind deren mathematische Entsprechung.

Die analoge Frage für Kreise ist deutlich einfacher, auch liefert sie ein wenig Überzeugung für die Richtigkeit der Keplerschen Vermutung. Ein wenig ebene Geometrie bzw. Herumexperimentieren mit einem Zirkel legt nahe, dass man um einen Kreis sechs weitere gleich große Kreise finden kann, die diesen berühren und sich dabei nicht überlappen. Entsprechend ist 6 die Kusszahl[72] in der Ebene. Für den dreidimensionalen Raum ist die Situation verzwickter: Hier stritten Isaac Newton und David Gregory Ende des 17. Jahrunderts, ob es 12 oder gar 13 Kugeln sind, welche eine gegebene Kugel gleicher Größe ohne Überlappung berühren können. Tatsächlich hatte Newton mit seiner 12 recht, wenngleich Platz für eine dreizehnte Kugel bestünde, nicht jedoch als Ganzes, sondern lediglich zerchnitten. Der erste rigorose Beweis hierfür stammt von Kurt Schütte & Bartel Leendert van der Waerden [127] aus dem zwanzigsten Jahrhundert.[73]

Für das Folgende ist es sinnvoll, einige Definitionen zu treffen. Unter einer Kugelpackung κ sei ein Arrangement von unendlich vielen gleichgroßen Kugeln verstanden, die sich nur berühren, aber nicht in mehr als einem Punkt überlappen dürfen. Die Dichte $\delta(\kappa)$ einer solchen Kugelpackung definieren wir als

$$\delta(\kappa) = \lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{vol}(\kappa \cap \mathcal{B}_r)}{\mathrm{vol}(\mathcal{B}_r)},$$

wobei $\mathcal{B}_r$ eine Kugel vom Radius r im $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Damit ist $\delta(\kappa)$ der Anteil von κ, der in $\mathcal{B}_r$ im Grenzwert $r \to \infty$ enthalten ist. Wir sprechen von einer Kugelgitterpackung, wenn die Mittelpunkte der Kugeln ein Gitter bilden; ferner sprechen wir in der Ebene von Kreisen anstelle von Kugeln.

Die dichteste Kreisgitterpackung ist, wie Lagrange [82] 1773 zeigte, hexagonal und bedeckt $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 90,69\ldots$ Prozent der Ebene; es gilt also

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \max_{\kappa} \delta(\kappa)$$

und die Dichte ist maximal unter aller Kreisgitterpackungen κ für ein hexagonales Gitter; in diesem Zusammenhang liefert die binäre quadratische Form $X^2 + XY + Y^2$ das zugehörige Minimum[74]. Diese Extremaleigenschaft suggeriert bereits die Kusszahl im Zweidimensionalen, aber dies ist natürlich kein Beweis. Die dichteste Kugelgitterpackung im dreidimensionalen Raum ist, wie Gauß [44] 1831 herleitete, flächenzentriert-kubisch mit einem Bedeckungsanteil von $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 74,04\ldots$ Prozent; die zugehörige ternäre quadratische Form ist $X^2 + Y^2 + Z^2 + XY + YZ + XZ$. Tatsächlich sind beide Packungen sogar unter allen Kreis- bzw. Kugelpackungen optimal, wie Orangenverkäufer und sogar mathematisch ungebildete Bienenvölker wissen. Aber hierfür einen rigorosen mathematischen Beweis zu geben, erwies sich klange Jahre als extrem schwierig. Die Abwesenheit von Struktur ist hierfür der Grund: Liegt eine Gitterstruktur vor, so lässt sich die damit verbundene Regelmäßigkeit in der Anordnung relativ einfach nutzen; hingegen ist eine aperiodische Packung wesentlich unangenehmer zu untersuchen. Das zweidimensionale Analogon der Keplerschen Vermutung behandelte Axel

[72] im Englischen 'kissing number'

[73] László Fejes Tóth [37] hat weitere Fragen zu endlichen Packungen aufgeworfen; diese stellen insbesondere mit Blick auf außermathematische Anwendungen eine Herausforderung dar. Leppmeier [87] behandelt u.a diese für eine Vielzahl von Optimierungsproblemen interessanten Fragestellungen (wie etwa platzsparende Packungen von Tennisbällen) und auftretende Überraschungen, wofür an dieser Stelle lediglich das Stichwort Wurstkatastrophe genannt sei.

[74] und die Eisensteinschen Zahlen $m+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})n$ mit ganzzahligen m, n bilden dieses Gitter in der komplexen Ebene mittels der dritten Einheitswurzel $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}) = \exp(\frac{2\pi i}{3})$.

Thue [139, 140] erfolgreich. Seine Idee benutzt implizit das Konzept der Voronoï-Zellen. Diese erweisen sich im Falle der dichtesten Kreispackung der Ebene als reguläre Sechsecke, womit folglich das hexagonale Gitte auf die dichteste Kreispackung führt – ein Grund mehr, auch für den dreidimensionalen Fall zu erwarten, dass die dichteste Kugelpackung von einem Gitter herrührt.

Die Keplersche Vermutung wurde von Hilbert in seine Liste der mathematischen Probleme für das zwanzigste Jahrhundert (als Teil des allgemeiner formulierten 18. Problems) aufgenommen (siehe [64]). Aber erst vor kurzem gelang es Thomas Callister Hales diese Nuss mit massiven Computereinsatz zu knacken.[75] Nach mehrjähriger Arbeit reichte er 1998 seine Arbeit in den renommierten Annals of Mathematics ein. Sein Ansatz basierte auf der oben angesprochenen alten Idee von László Fejes Tóth[76] [37] aus dem Jahre 1953, welche an Thues Ansatz anknüpfte und es erlaubt, die potentiell unendlich vielen Kugelanordnungen auf eine endliche Anzahl von Fällen zu reduzieren; wesentliches Werkzeug dabei sind die Voronoï-Zellen. Schließlich war Hales nach jahrelanger Vorarbeit soweit, dass lediglich einhundert Fälle übrigbleiben, die er dann einzeln mit den schnellsten verfügbaren Rechnern behandelt.[77] Aber gerade dieser Einsatz von Computern gibt letztlich Anlass zur Skepsis. Hales' umfassender Beweis von ca. 250 Seiten und 40 000 Zeilen Computercode wurde von Dutzenden Gutachtern über Jahre hinweg analysiert. Schließlich wird Hales Arbeit [54] 2005 veröffentlicht, allerdings mit dem Zusatz, dass die Gutachter zu 99 Prozent von der Richtigkeit überzeugt seien. Hier schwingt auch Unmut mit: Ein Beweis soll einen mathematischen Sachverhalt erleuchten; gewissermaßen ist der Beweis wichtiger als die Aussage selbst! Und dies geht Hales' Computerbewies ab. Nun haben sich Mathematik und Informatik seitdem rasant weiter entwickelt. Mittlerweile existieren so genannte Beweisassistenten, die im Gegensatz zu herkömmlichen Computerprogrammen komplexe Rechnungen gemäß den Reglen der Logik verifizieren. Hales möchte den Makel, der seinem Beweis anhaftete, mit einem solchen Beweisassistenten beseitigen. Er initiiert ein Projekt mit Namen Formal Proof of Kepler, kurz flyspeck[78], welches mit staatlicher Unterstützung und Einsatz des Informatikers Georges Gonthier von Microsoft tatsächlich in erstaunlicher Geschwindigkeit innerhalb eines Monats 2014 ein zweites Mal die Keplersche Vermutung verifiziert.

In fast allen höheren Dimensionen ist die Frage nach der dichtesten Kugelpackung, ja sogar nach der dichtesten Kugelgitterpackung bislang ungelöst. Lediglich für Spezialfälle sind Antworten bekannt. Eine besondere Rolle spielt hier das Leech-Gitter, entdeckt 1967 von John Leech [84], welches im 24-dimensionalen Raum die dichteste Kugelpackung bereitstellt und auf die beeindruckende Kusszahl $196\,560$ führt, wie Henry Cohn et al. [19] kürzlich zeigten; zuvor hatte Maryna Viazovska [141] den verwandten Fall der Dimension 8 gelöst mittels eines Zusammenhangs mit Quasimodulformen. Die speziellen Eigenschaften des Leech-Gitters machen es in vielerlei Weise interessant für Algebra und Zahlentheorie (z.B. hinsichtlich der sporadischen Gruppen und Modulformen), aber auch in der Codierungstheorie finden sich Anwendungen, worauf wir hier aber nicht weiter eingehen wollen (sondern stattdessen auf das Standardwerk von Conway & Sloane [20] verweisen). Erstaunlicherweise wird in allgemeinen höheren Dimensionen erwartet, dass die dichtesten Kugelpackungen nicht von

[75] Sein älterer Namensvetter, der Physiologe Stephen Hales (1677-1761) stellte im Rahmen seiner Untersuchungen zur Pflanzenphysiologie [53] randomisierte Experimente mit Erbsen an, welche für die Keplersche Vermutung sprachen.

[76] Hales listet aber noch weitere Unterstützer auf; insbesondere die Arbeit von Samuel P. Ferguson ist hier zu nennen.

[77] Dies erinnert an den Computerbeweis des Vierfarbensatzes durch Kenneth Apel & Wolfgang Haken 1976.

[78] also 'Fliegendreck'

Gittern herrühren, da die Struktur von Gittern zu einschränkend ist (cf. Cohn & Elkies [18], S. 690).

Minkowski selbst sah seine Geometrie der Zahlen als Wegbereiter:[79]

> "Alle Theoreme hier wiesen einen Ursprung auf, wir schöpften sie aus einer gemeinsamen, sehr durchsichtigen Quelle, die ich als das Prinzip der zentrierten konvexen Körper im Zahlengitter bezeichnen möchte. Nun sind wir in der Tat eine Strecke Wegs in das Reich der heutigen Zahlentheorie eingedrungen. Wir können daran denken, uns auf diesem Boden zu akklimatisieren."

Anschließend formulierte Minkowski, dass das Studium der Primideale wunderbare Zusammenhänge zwischen der Zahlentheorie und der Theorie der Funktionen offenbaren würde. Tatsächlich sind auf den Gebieten der algebraischen Zahlentheorie und in der Primzahlverteilung in den frühen Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts erhebliche Fortschritte erzielt worden.

Einige Aspekte der Geometrie der Zahlen konnten nicht in ihrer vollständigen Tiefe untersucht werden. Beispielsweise sei die additive Kombinatorik von Imre Ruzsa [123] erwähnt, in der Fragen nach dem Pendant von Maßen und Dimension bei diskreten Mengen nachgegangen wird. Für die von Eugène Ehrhart [35] angestossenen umfangreichen Untersuchungen und Verallgemeinerungen des Pickschen Satzes, welche Geometrie, Kombinatorik und Zahlentheorie auf sehr schöne Weise miteinander verknüpfen, sei hier auf das schöne Buch von Beck & Robins [3] verwiesen; Hugo Hadwigers Arbeiten zur Zerlegungen von Polytopen, stimuliert durch Max Dehns L¿"osung des dritten Hilbertschen Problems, besprechen Erdős et al. [36]. Verallgemeinerungen der Minkowskischen Theorie für Zahlkörper werden von K. Rogers & P. Swinnerton-Dyer [122] behandelt. Interessant sind auch Anwendungen der Geometrie der Zahlen und der Theorie der Gitter auf Fragestellungen der Kodierungstheorie und der Kryptographie (wie etwa das Auffinden eines kürzesten Gittervektors). Hier lieferten Lenstra, Lenstra & Lovász [86] mit ihrem LLL-Algorithmus zur Bestimmung kurzer Gittervektoren in Polynomialzeit einen äußerst wichtigen Beitrag (und eine Verbesserung und Erweiterung eines klassischen Verfahrens von Gauß). Für Anwendungen der Geometrie der Zahlen außerhalb der Zahlentheorie und sogar der Mathematik verweisen wir auf Lovász [88]. Für ein tieferes Eindringen in die Geometrie der Zahlen empfehlen wir die Bücher von Gruber & Lekkerkerker [51] sowie die Klassiker von Cassels [14] und Siegel [133]; geschichtliche Aspekte insbesondere in einem größeren geometrischen Kontext findet man bei Gruber [52] und Opolka & Scharlau [112]. Für die Gitterpunktprobleme bietet das Buch von Fricker [42] einen sehr guten Einstieg. Packungsprobleme werden sehr schön bei Rogers [121] dargestellt. Eine detaillierte Geschichte der Geometrie der Zahlen liefert die Dissertation von Sébastien Gauthier [47].

Literatur

[1] N.C. Ankeny, Sums of three squares, Proc. Am. Math. Soc. 8 (1957), 316-319

[2] Archimedes, Kugel und Zylinder, Ostwalds Klassiker der exakten Wiss., Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig 1922

[3] M. Beck, S. Robins Computing the Continuous Discretely, Springer 2007

[4] H.F. Blichfeldt, A new principle in the geometry of numbers, with some applications, Trans. Amer. Math. Soc. Trans. 15 (1914), 227-235

---

[79] [103], S. 234/235

[5] H.F. BLICHFELDT, The minimum value of quadratic forms, and the closest packing of spheres, Math. Ann. 101 (1929), 605-608
[6] O. BLUMENTHAL, Lebensgeschichte, in: DAVID HILBERT, Gesammelte Abhandlungen, Dritter Band, Berlin 1935, 388-429
[7] E. BOMBIERI, J. PILA, The number of integral points on arcs and ovals, Duke Math. J. 59 (1989), 337-357
[8] E. BOMBIERI, J. VAALER, On Siegel's lemma, Invent. Math. 73 (1983), 11-32
[9] M. BORN, Dynamik der Kristallgitter, Teubner, Leipzig 1915
[10] M. BORN, Erinnerungen an Hermann Minkowski zur 50. Wiederkehr seines Todestages, Naturwissenschaften 46 (1959), 501-505
[11] H. BRUNN, Ueber Ovale und Eiflächen, Diss. München, 1887
[12] H. BRUNN, Ueber Curven ohne Wendepunkte, Th. Ackermann., München 1889
[13] J.J. BURCKHARDT, Zur Geschichte der Entdeckung der 230 Raumgruppen, Arch. Hist. Exact Sci. 4 (1967), 235-246
[14] J.W.S. CASSELS, An introduction to the geometry of numbers, Springer 1959
[15] J.W.S. CASSELS, L.J. Mordell, Bull. Lond. Math. Soc. 6 (1974), 69-96
[16] A. CAUCHY, Démonstration du théorème général de Fermat sur les nombres polygones, in: 'Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy, Vol. VI, Gauthier-Villars, Paris 1905, 320-353
[17] C. CHABAUTY, Sur le minimum du produit de formes linéaires réelles, C. R. Acad. Sci., Paris 228 (1949), 1361-1363
[18] H. COHN, N. ELKIES, New upper bounds on sphere packings. I. Ann. Math. 157 (2003), 689-714
[19] H. COHN, A. KUMAR, S.D. MILLER, D. RADCHENKO, M.S. VIAZOVSKA, The sphere packing problem in dimension 24, (2016) available at arXiv:1603.06518v1
[20] J.H. CONWAY, N.J.A. SLOANE, Sphere Packings, Lattices and Groups, Springer 1993
[21] J.G. VAN DER CORPUT, Verallgemeinerung einer Mordellschen Beweismethode in der Geometrie der Zahlen, Acta Arith. 1 (1935), 62-66
[22] J.G. VAN DER CORPUT, H. DAVENPORT, On Minkowski's fundamental theorem in the geometry of numbers, Nederl. Akad. Wet., Proc. 49 (1946), 701-707
[23] H. DAVENPORT, On the product of three homogeneous linear forms. II. Proc. Lond. Math. Soc., II. Ser. 44 (1938), 412-431
[24] H. DAVENPORT, The Geometry of Numbers, Math. Gazette, 31 (1947), 206-210
[25] R. DESCARTES, Le Monde, ou Traite de la lumiere, Abaris Books, New York 1979; übersetzt und kommentiert von M.S. Mahoney
[26] J.I. DEUTSCH, Geometry of numbers proof of Götzky's four square theorem, J. Number Theory 96 (2002), 417-431
[27] E. DEZA, M.M. DEZA, Figurate Numbers, World Scientific 2012
[28] L.E. DICKSON, Obituary: Hans Frederik Blichfeldt. 1873-1945. Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 882-883
[29] P.G.L. DIRICHLET, Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen, Ber. Verh. Königl. Preuss. Akad. Wiss. (1842), 93-95; Werke I, 635-638
[30] P.G.L. DIRICHLET, Ueber die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie, Abhandl. Königl. Preuss. Akad. (1849), 69-83
[31] P.G.L. DIRICHLET, Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen, J. reine angew. Math. 40 (1850), 209-227
[32] F.J. DYSON, On the product of four non-homogeneous linear forms, Ann. Math. 49 (1948), 82-109
[33] E. EHRHART, Une généralisation du théorème de Minkowski, C. R. Acad. Sci., Paris 240 (1955), 483-485
[34] E. EHRHART, Sur les ovales et les ovoïdes, C. R. Acad. Sci., Paris 240 (1955), 583-585
[35] E. EHRHART, Sur les polyèdres rationnels homothétiques à n dimensions, C. R. Acad. Sci. Paris 254 (1962), 616-618
[36] P. ERDŐS, P.M. GRUBER, J. HAMMER, Lattice Points, Pitman Monographs, Longman Scientific & Technical, New York 1989
[37] L. FEJES TÓTH, Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, Springer 1953
[38] E.P. FISCHER, Einstein trifft Picasso und geht mit ihm ins Kino, Piper, 2005
[39] D. FOWLER, The Mathematics of Plato's Academy, Clarendon Press Oxford, 1999
[40] G. FREI, U. STAMMBACH, Die Mathematiker an den Zürcher Hochschulen, Birkhäuser, Basel 1994
[41] F. FRICKER, Die Geschichte des Kreisproblems, Mitteilungen Math. Sem. Gießen 111 (1974), 1-34
[42] F. FRICKER, Einführung in die Gitterpunktlehre, Birkhäuser 1982
[43] C.F. GAUß, Disquisitiones Arithmeticae, Gerhard Fleischer, Leipzig 1801; deutsche Übersetzung herausgegeben von H. Maser, Springer, 1889

[44] C.F. GAUß, Recension der "Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von Ludwig Seeber", Göttingische Gelehrte Anzeigen, 9. Juli 1831; nachgedruckt in J. reine angew. Math. 20 (1840), 312-320

[45] C.F. GAUß, De nexu inter multitudinem classinum, in ques formae binariae secundi gradus distribuuntur, earumque determinantem, (1834/37); in: Werke, II, 269-291; nachgedruckt in [43]

[46] C.F. GAUß, Mathematisches Tagebuch 1796-1814, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1976

[47] S. GAUTHIER, La géométrie des nombres comme discipline (1890-1945), Dissertation, Paris 2007

[48] H. GINTNER, Ueber Kettenbruchentwicklung und über die Approximation von komplexen Zahlen, Dissertation, Wien 1936

[49] F. GÖTZKY, Über eine zahlentheoretische Anwendung von Modulfunktionen zweier Veränderlicher, Math. Ann. 100 (1928), 411-437

[50] J. GRAY, Plato's Ghost, Princeton University Press 2008

[51] P.M. GRUBER, C.G. LEKKERKERKER, Geometry of Numbers, North-Holland, Elsevier 1987, 2nd ed.

[52] P.M. GRUBER, Zur Geschichte der Konvexgeometrie und der Geometrie der Zahlen, in: Ein Jahrhundert Mathematik 1890-1990, Festschrift zum Jubiläum der DMV, herausgegeben von G. Fischer et al., Dokumente zur Geschichte der Mathematik 6, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1990, 421-455

[53] S. HALES, Vegetable staticks, or an account of some statical experiments on the sap of vegetables, London 1727

[54] T.C. HALES, A proof of the Kepler Conjecture, Annals of Math. 162 (2005), 1063-1183

[55] T.C. HALES, Historical overview of the Kepler conjecture, Discrete Comput. Geom. 36 (2006), 5-20

[56] H. HANCOCK, Development of the Minkowski Geometry of Numbers, Vol. I & II, Macmillan, New York 1939, Nachdruck bei Dover 1964

[57] G.H. HARDY, On the expression of a number as the sum of two squares, Quart. J. 46 (1915), 263-283

[58] D.B. HAUNSPERGER, S.F. KENNEDY, Sums of triangular numbers, Math. Mag. 70 (1997), 46

[59] A. HEEFFER, B. RITTAUD, The pigeonhole principle, two centuries before Dirichlet, Math. Intelligencer 36 (2014), 27-29

[60] C. HERMITE, Extraits de lettre de M. Ch. Hermite à M. Jacobi sur différents objets de la théorie des nombres, Première lettre à M. Jacobi, J. reine angew. Math. 40 (1850), 261-278

[61] F. HERZOG, B.M. STEWART, Patterns of visible and nonvisible lattice points, Amer. Math. Monthly 78 (1971), 487-496

[62] D. HILBERT, Ueber die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte, Math. Ann. XLVI (1895), 91-96

[63] D. HILBERT, Grundlagen der Geometrie, Göttingen 1899

[64] D. HILBERT, Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congress zu Paris 1900, Gött. Nachr. (1900), 253-297

[65] D. HILBERT, Hermann Minkowski, Gedächtnisrede, Gött. Nachr., Gesch. Mitt. (1909), 72-101; Math. Ann. 68 (1910), 445-471

[66] D. HILBERT, Grundlagen der Geometrie (Festschrift 1899), kommentiert von K. Volkert, Springer 2015

[67] S. HILDEBRANDT, Didos Problem, Math. Semesterber. 57 (2010), 163-168

[68] E. HLAWKA, Über die Approximation von zwei komplexen inhomogenen Linearformen, Monatsh. Math. Phys. 46 (1938), 324-334

[69] E. HLAWKA, Zur Geometrie der Zahlen, Math. Z. 49 (1943), 285-312

[70] E. HLAWKA, 90 Jahre Geometrie der Zahlen, Jahrbuch Überblicke Mathematik 1980, Bibliographisches Institut, Mannheim, 9-41

[71] N. HOFREITER, Diophantische Approximationen in imaginär quadratischen Zahlkörpern, Monatsh. Math. Phys. 45 (1937), 175-190

[72] A. HURWITZ, Ueber lineare Formen mit ganzzahligen Variabeln, Gött. Nachr. (1897), 139-145

[73] M.N. HUXLEY, Exponential Sums and Lattice Points III. Proc. London Math. Soc. 87 (2003), 591-609

[74] V. JARNÍK, Über die Gitterpunkte auf konvexen Kurven, Math. Z. 24 (1925), 500-518

[75] J. KEPLER, Vom sechseckigen Schnee (Strena seu de Nive sexangula), ins Deutsche übersetzt und kommentiert von D. GOETZ, Akad. Verlagsgesellsch. Geest & Portig, Leipzig 1987

[76] T.H. KJELDSEN, From measuring tool to geometrical object: Minkowski's development of the concept of convex bodies, Arch. Hist. Exact Sci. 62 (2008), 59-89

[77] F. KLEIN, Ueber eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwickelung, Gött. Nachr. (1895), 357-359

[78] F. KLEIN, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Springer 1926

[79] J.F. KOKSMA, Diophantische Approximationen, Springer 1936

[80] A. KORKINE, G. ZOLOTAREV, Sur les formes quadratiques, Clebsch Ann. 6 (1873), 366-389
[81] A. KORKINE, G. ZOLOTAREV, Sur les formes quadratiques positives, Clebsch Ann. 11 (1877), 242-292
[82] J.L. LAGRANGE, Recherches d'arithmetique, Nouv. Mem. Acad. Roy. Sc. Belle Lettres (1773), 265-312
[83] J.D. LAISON, M. SCHICK, Seeing dots: visibility of lattice points, Math. Mag. 80 (2007), 274-282
[84] J. LEECH, Notes on Sphere Packings, Canad. J. Math. 19 (1967), 251-267
[85] C.G. LEKKERKERKER, Geometry of Numbers, North-Holland, Groningen 1969; Vorgänger von [51]
[86] A.K. LENSTRA, H.W. LENSTRA, L. LOVÁSZ, Factoring polynomials with rational coefficients, Math. Ann. 261 (1986), 515-534
[87] M. LEPPMEIER, Kugelpackungen von Kepler bis heute, Vieweg, 1997
[88] L. LOVÁSZ, Geometry of numbers and integer programming, in: Mathematical programming, Proc. 13th Int. Symp., Tokyo/Jap. 1988, Math. Appl., Jap. Ser. 6 (1989), 177-201
[89] K. MAHLER, A theorem of B. Segre, Duke Math. J. 12 (1945), 367-371
[90] G.A. MARGULIS, Formes quadratiques indéfinies et flots unipotents sur les espaces homogènes, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I 304 (1987), 249-253
[91] C.T. MCMULLEN, Minkowski's conjecture, well-rounded lattices and topolgical dimension, J. Amer. Math. Soc. 18 (2005), 711-734
[92] U.C. MERZBACH, Robert Remak and the estimation of units and regulators, in: Festschrift für Hans Wußing zu seinem 65. Geburtstag, S.S. Demidov, (ed.) et al., Birkhäuser 1992, 481-522
[93] H. MINKOWSKI, Mémoire sur la théorie des formes quadratiques à coëfficients entiers, Paris. Impr. nationale. Extrait des Mém. présentés par divers savants à l'Ac. des sc. de l'Inst. de France XXIX (1884)
[94] H. MINKOWSKI, Beweis, dass jede Discriminante eine von Eins verschiedene Zahl ist, Naturf. Ges. Bremen. 13 (1890)
[95] H. MINKOWSKI, Ueber die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithmen, J. reine angew. Mathe. CVII (1891), 278-297 (1891)
[96] H. MINKOWSKI, Ueber Eigenschaften von ganzen Zahlen, die durch räumliche Anschauung erschlossen sind, in: Mathematical Papers read at the International Mathematical Congress held in conncetion with the World's Columbian Exposition Chicao 1893, E. Hastings Moore et al. (eds.), Macmillan, New York 1896, 201-207
[97] H. MINKOWSKI, Généralisation de la théorie des fractions continues, Ann. de l'Éc. Norm. 13 (1896), 41-60
[98] H. MINKOWSKI, Geometrie der Zahlen, Teubner, Leipzig, 1896; zweite Auslieferung 1910[80]
[99] H. MINKOWSKI, Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen, Deutsche Math.-Ver. 9 (1901), 115-121
[100] H. MINKOWSKI, Ueber die Annäherung an eine reelle Grösse durch rationale Zahlen, Math. Ann. 54 (1901), 91-124
[101] H. MINKOWSKI, Zur Geometrie der Zahlen, Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb. (1905), 164-173
[102] H. MINKOWSKI, Peter Gustav Lejeune Dirichlet und seine Bedeutung für die heutige Mathematik, Jber. DMV 14 (1905), 149-163
[103] H. MINKOWSKI, Diophantische Approximationen, Teubner, Leipzig 1907
[104] H. MINKOWSKI, Briefe an David Hilbert, mit Beiträgen und herausgegeben von L. Rüdenberg und H. Zassenhaus, Springer 1973
[105] L.J. MORDELL, On some arithmetical results in the geometry of numbers, Compositio Math. 1 (1934), 248-253
[106] L.J. MORDELL, Some results in the geometry of numbers for non-convex regions, J. London math. Soc. 16 (1941), 149-151
[107] L.J. MORDELL, The product of three homogeneous linear ternary forms, J. Lond. Math. Soc. 17 (1942), 107-115
[108] L.J. MORDELL, Observation on the minimum of a positive quadratic form in eight variables, J. Lond. Math. Soc. 19 (1944), 3-6
[109] L.J. MORDELL, On the representation of a number as a sum of three squares, Rev. Math. Pures Appl. 3 (1958), 25-27
[110] R.B. NELSEN, Proofs Without Words II. More Exercises in Visual Thinking, Mathematical Association of America, 2000
[111] J. NEUKIRCH, Algebraische Zahlentheorie, Springer 1992

[80]Die zweite Auflage erschien im Jahr nach Minkowskis unerwartetem Ableben. Die Herausgeber David Hilbert und Andreas Speiser schreiben im Vorwort: "Der Bogen, den wir als zweite Lieferung veröffentlichen, fand sich als vollständig abgeschlossenes Manuskript im Nachlasse, und wir handeln nach dem Wunsche des Verfassers, wenn wir ihn für sich herausgeben und so dem Werke einen gewissen Abschluß verleihen." Sowohl Hlawka [70] als auch Hancock [56] monieren, dass diese zweite Auflage nicht der von Minkowski angedachten Form entspricht; vielleicht wird dem Hancocks zweibändiges Werk [56] gerecht.

[112] H. Opolka, W. Scharlau, Von Fermat bis Minkowski. Eine Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Entwicklung, Springer 1980

[113] A. Oppenheim, The minima of indefinite quaternary quadratic forms, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 15 (1929), 724-727

[114] E.P. Ozhigova, A.P. Yushkevich, Problems in the theory of numbers, in: Mathematics of the 19th Century, A.N. Kolmogorov, A.P. Yushkevich (eds.), Birkhäuser 2001

[115] G.A. Pick, Geometrisches zur Zahlenlehre. (Bearbeitung eines in der deutschen mathematischen Gesellschaft zu Prag gehaltenen Vortrags), Sonderabdr. Naturw.-medizin. Verein f. Böhmen 'Lotos', 8 (1899)

[116] G. Pólya, Zahlentheoretisches und Wahrscheinlichkeitstheoretisches über die Sichtweite im Walde, Archiv Math. Phys. 27 (1918), 135-142

[117] R. Remak, Vereinfachung eines Blichfeldtschen Beweises aus der Geometrie der Zahlen, Trans. Amer. Math. Soc. 15 (1914), 227-235

[118] R. Remak, Verallgemeinerung eines Minkowskischen Satzes. I, II. Math. Z. 17; 18 (1923), 1-34; 173-200

[119] C.A. Rogers, The product of the minima and the determinant of a set, Proc. Akad. Wet. Amsterdam 52 (1949), 256-263

[120] C.A. Rogers, Existence theorems in the geometry of numbers, Ann. Math. 48 (1947), 994-1002

[121] C.A. Rogers, Packing and Covering, Cambridge Tracts 54, 1964

[122] K. Rogers, H.P.F. Swinnerton-Dyer, The geometry of numbers over algebraic number fields, Trans. Am. Math. Soc. 88 (1958), 227-242

[123] I.Z. Ruzsa, Additive combinatorics and geometry of numbers, in: Proceedings of the international congress of mathematicians (ICM), Madrid, Spain, August 22–30, 2006. Volume III: Invited lectures, M. Sanz-Solé et al. (eds.), European Mathematical Society, Zurich 2006, 911-930

[124] W. Sartorius von Waltershausen, Gauss zum Gedächtnis, Hirzel, Leipzig 1856.

[125] W. Scherrer, Ein Satz über Gitter und Volumen, Math. Ann. 86 (1922), 99-107

[126] W.M. Schmidt, Norm form equations, Ann. Math. 96 (1972), 526-551

[127] K. Schütte, B.L. van der Waerden, Das Problem der dreizehn Kugeln, Math. Ann. 125 (1953), 325-334

[128] J. Schwermer, Räumliche Anschauung und Minima positiv definiter quadratischer Formen. Zur Habilitation von Hermann Minkowski 1887 in Bonn. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 93 (1991), 49-105

[129] C.J. Scriba, P. Schreiber, 5000 Jahre Geometrie, Springer 2010

[130] L.A. Seeber, Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen, Freiburg 1831

[131] C.L. Siegel, Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und ein damit zusammenhängendes Extremalproblem, Acta Math. 65 (1935), 307-323

[132] C.L. Siegel, A mean value theorem in geometry of numbers, Ann. Math. 46 (1945), 340-347

[133] C.L. Siegel, Lectures on the Geometry of Numbers, bearbeitete Vorlesungsmitschrift von B. Friedman, K. Chandrasekharan, Springer, 1989

[134] K. Soundararajan, Omega results for the divisor and the circle problem, Int. Math. Res. Not. 36 (2003), 1987-1998

[135] H. Steinhaus, Sur un theorem de M. V. Jarnik, Colloq. Math. 1 (1947), 1-5

[136] W. Strobl, Aus den wissenschaftlichen Anfängen Hermann Minkowskis, Hist. Math. 12 (1985), 142-156

[137] H.M. Syta, Short biography of G. Voronoï, in: "Voronoï's impact on modern science. Book I", Engel, P. (ed.) et al., (Transl. from the Ukrainian) Kyiv: Institute of Mathematics; Proc. Inst. Math. Natl. Acad. Sci. Ukr., Math. Appl. 21 (1998), 11-24

[138] G.G. Szpiro, Die Keplersche Vermutung, Springer 2011

[139] A. Thue, Om nogle geometrisk taltheoretiske Theoremer, Naturforskermöde (1892). 352-353

[140] A. Thue, Über die dichteste Zusammenstellung von kongruenten Kreisen in einer Ebene, Christiania Vid.-Selsk. Skr. 1 (1910), 9 S.

[141] M.S. Viazovska, The sphere packing problem in dimension 8, (2016) available at arXiv:1603.04246v1

[142] G.F. Voronoï, Ueber eine Verallgemeinerung des Kettenbruch-Algorithmus (Russisch), Doktorarbeit, Warschau 1896; siehe auch G.F. Voronoï, Collected works, Verlag der Akademie der Wissenschaften der Ukrainischen SSR, Kiew 1952

[143] G.F. Voronoï, Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques, J. für Math. 126 (1903), 241-282

[144] G.F. Voronoï, Sur le développement, à l'aide des fonctions cylindriques, des sommes doubles $\sum f(pm^2 + 2qmn + rn^2)$, où $pm^2 + 2qmn + rn^2$ est une forme positive à coefficients entiers, Verh. d. 3. intern. Math.-Kongr. Heidelb. (1905), 214-245

[145] G.F. Voronoï, Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième mémoire: recherches sur les parallélloèdres primitifs, J. reine angew. Math. 134 (1908), 198-287; 136 (1909), 67-178

[146] A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Z. 19 (1924), 300-307

[147] J. Wójcik, On sums of three squares, Colloq. Math. 24 (1971/72), 117-119

[148] A.C. Woods, The anomaly of convex bodies, Proc. Camb. Philos. Soc. 52 (1956), 406-423

[149] H.J. Zassenhaus, On the Minkowski-Hilbert Dialogue on Mathematization, Canad. Math. Bull. 18 (1975), 443-461

Nicola Oswald, Institut für Mathematik und Informatik, Bergische Universität Wuppertal, Gaußstr. 20, 42 119 Wuppertal, Germany, oswald@uni-wuppertal.de;